

Tutorium

Theoretische Mechanik, 2. Semester

Michel Pannier

- angepasst an die Vorlesung von Prof. Ansgar, Stand 2014
- zur freien Verwendung

Kontakt: michel.pannier@uni-jena.de



Motivation und Überblick

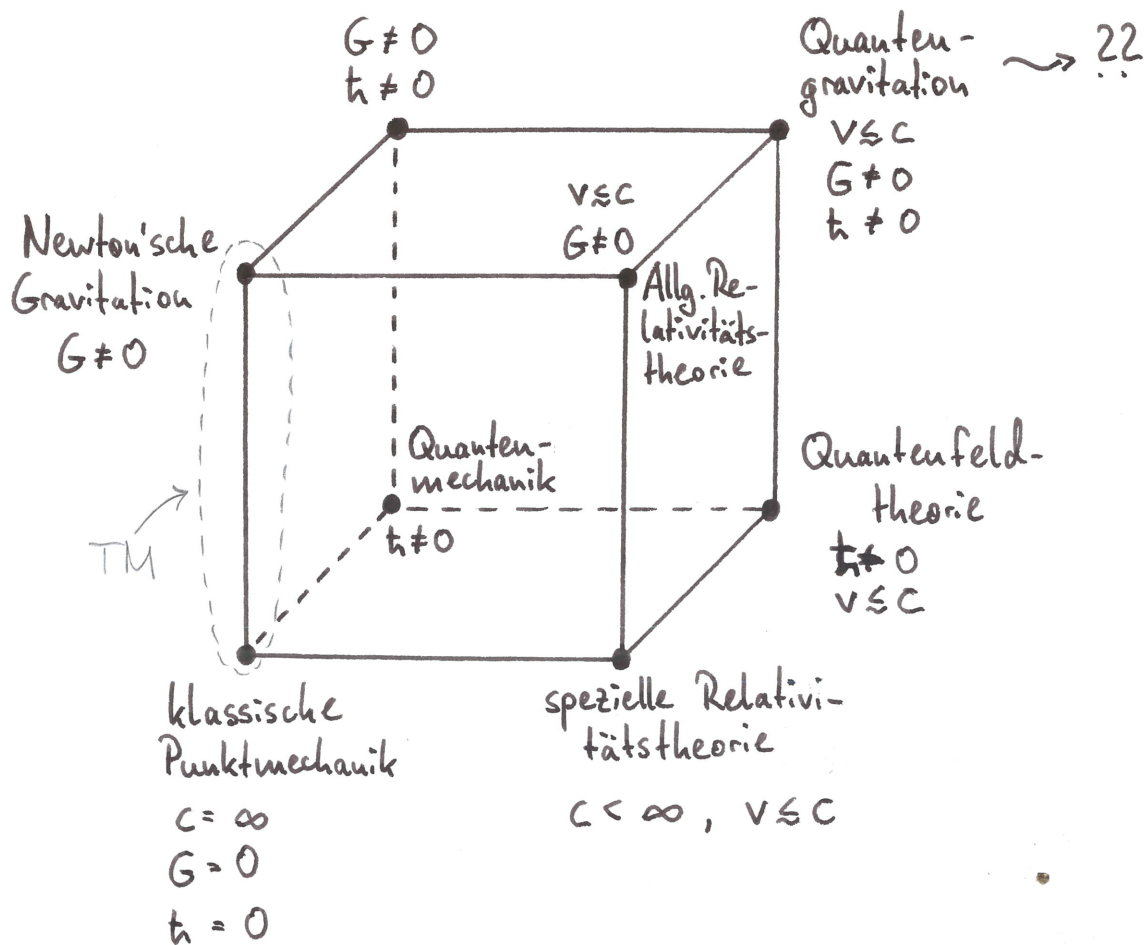
Etwas „Meta-Theorie“:

Welche Rolle spielt die Mechanik in der theoret. Physik?

Würfel d. theoret. Physik:

wesentliche Naturkonstanten

- c - Lichtgeschwindigkeit
- G - Newton'sche Gravitationskonstante
- \hbar - (reduziertes) Planck'sches Wirkungsquantum



Inhalt:

- Grundlagen
 - flacher, euklidischer Raum in 3 Dimensionen \mathbb{R}^3 ;
 - Symmetrien: Rotation, Translation (Nullpunktversch.) („Euklidische Bewegungsgruppe“)
 - Vektorrechnung, Koordinatentransformationen (Jacobi-Matrix)
- Kinematik des Massenpunktes
 - Newton'sche Axiome, Inertialsysteme, Scheinkräfte
 - Bewegung im Potential, Erhaltungssätze
 - Gravitationsgesetz, Planetenbewegung
- Massenpunktsysteme
 - Schwerpunkt, reduzierte Masse
 - elastischer Stoß, Zweikörperproblem
 - äußere Kräfte \rightarrow d'Alembert'sches Prinzip & Lagrange-Gleichungen I. Art
 - Trägheitsmoment des starren Körpers
- Lagrange-Gleichungen II. Art (wichtiger Schnittpunkt zur Allgemeinen Relativitätstheorie !)
- Kreiseltheorie
- Hamilton'sche Mechanik (wichtiger Schnittpunkt zur Quantenmechanik !)
 - Prinzip der kleinsten Wirkung, kanonische Gleichungen
 - Poisson-Klammern, Hamilton-Jacobi-Gleichung

Literaturhinweis:

H. Stephani, G. Kluge: „Theoretische Mechanik“, Spektrum 1995

Inertialsysteme

Ein Inertialsystem ist ein Koordinatensystem, in dem das 1. Newton'sche Axiom gilt.

→ triviale Feststellung: nicht alle KOS sind Inertial syst. (z.B. das Ruhesystem eines beschleunigt bewegten Massenpunktes)

Gibt es überhaupt Inertialsysteme?

→ Mindestens eines! Das KOS, das bezüglich des Fixsternhimmels im Mittel ruht.

→ Dann muss es unendlich viele geben, da jede Galilei-Transformation in ein neues IS abbildet.

In allen IS hat „die Physik“ die gleiche Form. In nicht-IS treten Scheinkräfte auf.

Bem: Das sind Näherungen!

→ Längen- und Zeitintervalle müssen in der speziellen Relativitätstheorie ebenfalls transformiert werden.

(Lorentz-Transformationen)

→ In der Allgemeinen Relativitätstheorie können IS nur noch lokal existieren.

Koordinatentransformationen, Jacobi-Matrix

Eine Koordinatentransf. ist eine Abbildung zwischen Koordinatensystemen: $\Sigma \rightarrow \Sigma'$, $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$.

Wir betrachten vor allem:

• euklidische Transformationen:

- Rotationen + Translationen
- überführen den euklidischen Raum in sich selbst
- lassen messbare Größen invariant (räumliche und zeitliche Abstände, Relativgeschwindigkeiten, ...)

Ortsvektoren: $\vec{r} \in \Sigma$, $\vec{r}' \in \Sigma'$

$$\vec{r}' = \hat{O} \vec{r} + \vec{a}$$

↑ ↑
Rotation Translation

(\hat{O} - 3x3-Matrix,
 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konstant)

Meist werden Spiegelungen durch $\det \hat{O} \stackrel{!}{=} 1$ ausgeschlossen!

• Galilei-Transformationen:

- Rotationen + Translationen + Relativbewegung + Zeitverschiebung
- überführen Inertialsysteme in Inertialsysteme
- lassen „die Physik“ invariant

$$\vec{r}' = \hat{O} \vec{r} + \vec{u}t + \vec{a}, \quad t' = t + \tau$$

↑ ↑ ↑ ↑
Rotation Relativbewegung Translation Zeitverschiebung

($\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ konst. Geschwindigkeit,
 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konst., $\tau \in \mathbb{R}$ konst.)

Bemerkung zu den Rotationsmatrizen:

- Sie sind (hier) 3×3 -Matrizen mit komplexen Einträgen, man schreibt $\hat{O} \in \text{Mat}(3, \mathbb{C})$.
- Sie sind orthogonal, d.h. $\hat{O}^T \hat{O} = \mathbb{1}$. ~~Hermitesche Sie sind symmetrisch.~~ Man schreibt $\hat{O} \in \mathcal{O}(3)$ (siehe Algebra I).
Diese Forderung garantiert, dass das Skalarprodukt unter Drehungen invariant bleibt: $(\hat{O}\vec{a}, \hat{O}\vec{b}) = (\underbrace{\hat{O}^T \hat{O}}_{\mathbb{1}} \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$.
- Mit $\det \hat{O} = 1$ werden (Dreh-)Spiegelungen ausgeschlossen, man schreibt $\hat{O} \in \text{SO}(3)$ (siehe Algebra I).

Zur Schreibweise des Skalarproduktes:

Es sollen die Regeln der Matrixmultiplikation gelten!

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_x \ a_y \ a_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \hat{a}^T \cdot \hat{b} \quad (\text{Vektoren als } 1 \times 3\text{-Matrizen})$$

Daher: $(\hat{O}\vec{a}, \hat{O}\vec{b}) = (\hat{O}\hat{a})^T \cdot (\hat{O}\hat{b}) = (\hat{O}^T \hat{O} \hat{a}) \cdot \hat{b} = (\hat{O}^T \hat{O} \vec{a}, \vec{b})$
(wegen $(x \cdot y)^T = y^T \cdot x^T$)

Klassifizierung von Transformationen in

- aktive: Eine Anordnung (Vektoren, Flächen, ...) wird rotiert, verschoben, ...
- passive: Das Koordinatensystem wird rotiert, verschoben, ... \rightarrow Basiswechsel!

Man erwähnt meist nicht explizit, welche Art Transformation gerade durchgeführt wird.

Was ändert sich durch Koordinatentransformationen?

- Die Matrizen (also auch Vektoren) bekommen andere Einträge. Klar!
- euklidische und Galilei-Transformationen lassen die Physik invariant. Andere T. (etwa beschleunigte Relativbewegungen) können z.B. zu Scheinkräften führen.
⇒ "Messwerte" ändern sich
- Nicht-Euklid- oder Galilei-Tr. ändern auch die "Art", wie gemessen wird (das Volumenelement nimmt eine andere Gestalt an ⇒ Integrale ändern sich).

Explizite Form der Drehmatrizen:

Drehung um die

• x-Achse: $\hat{R}^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ | Beachte: $\hat{R}^T \hat{R} = 11$, $\det \hat{R} = 1$

• y-Achse: $\hat{R}^{(y)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$

• z-Achse: $\hat{R}^{(z)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Daraus lassen sich alle übrigen Drehungen zusammensetzen!

• Hintereinanderausführung von Drehungen:

$$\vec{x}'' = \hat{R}_2 \vec{x}' = \hat{R}_2 \hat{R}_1 \vec{x}, \quad \text{Reihenfolge beachten!}$$

• Wie sieht eine Drehung \hat{R}_1 gesehen aus einem anderen (mit \hat{R}_2 verdrehten) Koordinatensystem aus?

Antwort: $\hat{R}_1 \vec{x}' = \hat{R}_2 \hat{R}_1 \hat{R}_2^{-1} \vec{x}'$

Anschauliche Deutung:

\hat{R}_2^{-1} rotiert \vec{x}' in das ungestrichene Koordinatensystem zurück.

Dort wirkt \hat{R}_1 ganz normal auf \vec{x} ($\vec{x}' = \hat{R}_2 \vec{x}$).

Dann wird das Ergebnis von \hat{R}_2 wieder in das gestrichene Koordinatensystem übertragen.

Bem: Hier spielt \hat{R}_1 die Rolle einer aktiven und \hat{R}_2 die Rolle einer passiven Koordinatentransformation.

Die Jacobi-Matrix

Allgemeine Definition: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine Fkt.,
 $f := (f_1, \dots, f_m)$. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und die Koordinaten in \mathbb{R}^n heißen (x_1, \dots, x_n) .

Jacobi-Matrix am Punkt $a \in U$:

$$\hat{J}_f(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_a \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_a & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_a & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \Big|_a & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \Big|_a & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \Big|_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \text{grad } f_2(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{pmatrix}$$

(heißt auch „Gradientenmatrix“)

Beispiele:

A) Drehung von Vektoren um die z-Achse: $\vec{x}' = \hat{R}^{(z)} \vec{x}$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y \\ \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \\ z \end{pmatrix}$$

Hier ist also $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad f_2 = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad f_3 = z$$

$$\rightarrow \hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{J} = \underline{\underline{\hat{R}^{(\alpha)}}}$$

B) Übergang Zylinder-Koordinaten \rightarrow kart. Koordinaten:

$$(r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z) \quad (\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$$

$$\text{Hier: } x = r \cos \varphi \rightarrow f_1 = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \rightarrow f_2 = r \sin \varphi$$

$$z = z \rightarrow f_3 = z$$

$$\rightarrow \hat{J} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \hat{R}^{(\alpha)}$$

Beachte: \hat{J} ist weder orthogonal, $\hat{J}^T \hat{J} \neq \mathbb{1}$, noch ist die Determinante 1. Das ist also keine euklidische oder Galilei-Transformation! Die Integration wird sich ändern (neues Volumenelement)!

In der Tat gilt: $dV = |\det \hat{J}| dx dy dz$, also:

$$(r, \varphi, z): dV = |\det \hat{J}| dr d\varphi dz = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr d\varphi dz \\ = r dr d\varphi dz.$$

Beachte: Rotationen lassen wegen $\det \hat{R} = 1$ also per Definition automatisch das Volumenelement in Frieden.

Mit $df_n = \frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial y} dy + \frac{\partial f_n}{\partial z} dz$, u.s.w. (vgl. MMdP I)

folgt sofort, dass die Jacobi-Matrix die Differentiale

transformiert:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \\ dz \end{pmatrix}$$

Bemerkungen zum Tangentialraum und Christoffelsymbolen

Wir betrachten den \mathbb{R}^3 als Punktraum; jeder Punkt ist eindeutig durch ein 3-Tupel dargestellt, z.B. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Dazu muss ein Koordinatensystem gewählt werden.

Vektoren sind Elemente des Tangentialraumes (an einem Punkt).

$$T_p := \{ \text{Richtungsableitungen entlang Kurven durch } p \in \mathbb{R}^3 \}$$

T_p ist ein Vektorraum.

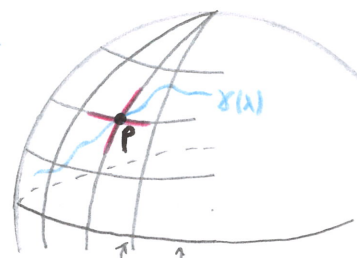
Erklärung:

- Betrachten 2-dimensionalen Raum S_2 , $p \in S_2$.

- Kurve $\gamma(\lambda)$:

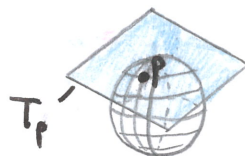
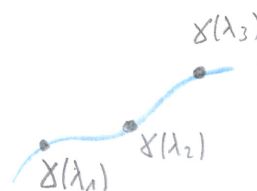
$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S_2 \quad \text{oder} \\ [0,1] \rightarrow S_2 \quad \text{oder} \dots$$

λ : Kurvenparameter



Kurve $\gamma(\lambda)$.

$\mu = \text{const.}$,
 $\varphi = \text{const.}$



- Man kann die Richtungsableitung $\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}(p)$ am Punkt p bilden.

- Für alle möglichen Kurven γ bilden diese den Tangentialraum, $T_p := \{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mid \gamma \text{ Kurve durch } p \}$; als Basis bieten sich die Ableitungen nach den Koordinaten an (auch die Koordinatenlinien sind ja Kurven), also ∂_x und ∂_y .

Zurück zum \mathbb{R}^3 : Basis $\partial_x, \partial_y, \partial_z$

Wir schreiben $\vec{e}_x \equiv \partial_x$, $\vec{e}_y \equiv \partial_y$, $\vec{e}_z \equiv \partial_z$ und für jedes beliebige Element des Tangentialraumes

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Weitere Schreibweisen:

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_{x_1} + x^2\vec{e}_{x_2} + x^3\vec{e}_{x_3} \equiv \sum_{i=1}^3 x^i\vec{e}_i$$

$$r^i = x^i, \quad i=1, \dots, 3 \quad (\text{Bem.: Indizes oben})$$

Der Tangentialraum sieht an allen Punkten im \mathbb{R}^3 gleich aus! \Rightarrow Können ganz normal addieren, subtrahieren, differenzieren, ...

Wir hätten den \mathbb{R}^3 auch gleich als Vektorraum auffassen können!

weiterführende Bem:

• Die Nützlichkeit dieser Betrachtungen spielt erst in gekrümmten Räumen eine Rolle (\rightarrow ART).

• Es fehlt noch das Konzept des Dualraumes: Für den \mathbb{R}^3 kann auch dort jeder Vektor dargestellt werden,

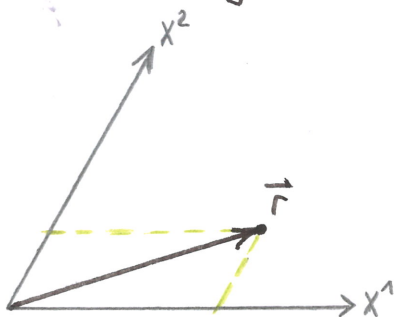
$$\vec{r} = x_1\vec{e}^1 + x_2\vec{e}^2 + x_3\vec{e}^3, \quad \text{bzw. } r_i = x_i, \quad i=1, \dots, 3.$$

• Man spricht von

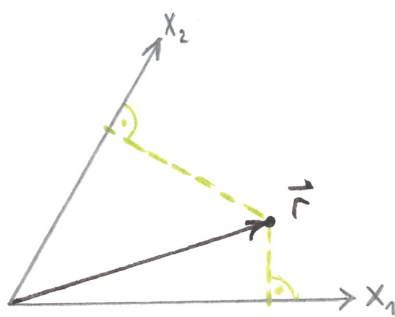
- „kontravarianten“ Vektoren, im Tangentialraum (Komponenten tragen Indizes oben)

- „kovarianten“ Vektoren im Dualraum (Indizes unten)

Bsp: nicht-orthogonale Koordinaten



kontravariante Komponenten
(Parallelprojektionen)



kovariante Komponenten
(Lote)

Vom Tangentialraum zur Jacobi-Matrix

Wir schreiben die Einheitsvektoren als Elemente des Tangentialraumes, also:

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_x = \frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x^1} \equiv \partial_1$$

$$\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_y = \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} \equiv \partial_2$$

$$\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial x^3} \equiv \partial_3,$$

dann ergibt sich das Transformationsgesetz einfach aus der Kettenregel.

Koordinatentransformation:

$$\Sigma \rightarrow \Sigma', \quad x^i \mapsto x^{i'}, \quad i=1,2,3$$
$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \mapsto (\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'})$$

Die neuen (gestrichelten) Koordinaten sind Funktionen der alten: $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$.

$$\text{Kettenregel: } \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^3}$$
$$= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{e}_{i'} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \vec{e}_j}}$$

Die Koeffizienten sind gerade die Einträge der zur Umkehrabbildung $x^i = x^i(x^{i'})$ gehörenden Jacobi-Matrix

$$\hat{J}_{x^{i'} \rightarrow x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix},$$

d.h. $\vec{e}_{i'} = \sum_{j=1}^3 J_{ji'} \vec{e}_j$, bzw.

$$\vec{e}_{1'} = J_{11} \vec{e}_1 + J_{21} \vec{e}_2 + J_{31} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_{2'} = J_{21} \vec{e}_1 + \dots \text{ u.s.w.}$$

Das lässt sich zusammenfassen:

$$[\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \cdot \hat{J}_{x^i \mapsto x^{i'}}.$$

Das gilt nur für Vektoren aus dem Tangentialraum, also solche, die ihren Index unten tragen (die Koordinaten tragen ihn dann oben, z.B. $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3$)!

Bem: Wir fassen „kontravariante Vektoren“, also Vektoren, deren Komponenten den Index oben tragen, als Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf. „Kovariante Vektoren“ sind dann Zeilenvektoren (x, y, z) .

Christoffel - Symbole

... werden in dieser Vorlesung keine Rolle spielen!

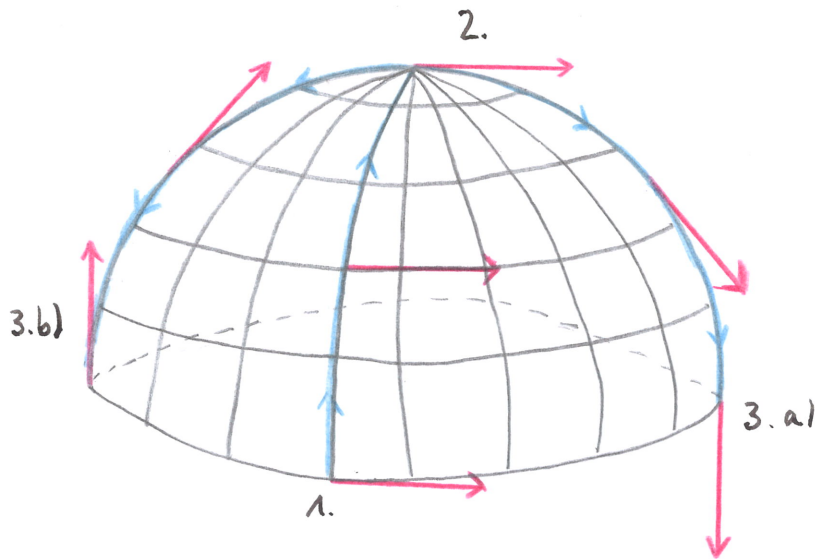
Physik. Gesetze werden meist in differentieller Form geschrieben.

Ableitung durch Differentialquotienten definiert:

$$\partial_x \vec{F} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(x+\Delta x) - \vec{F}(x)}{\Delta x}.$$

Hier werden Elemente zweier verschiedener Tangentialräume subtrahiert!

Schwierigkeiten beim Paralleltransport von Vektoren in gekrümmten Räumen: Bsp. S_2



Man braucht eine spezielle „Art“ Ableitung, damit der Differentialquotient unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems dieselbe Form annimmt (sich „richtig“ transformiert).

→ sog. „kovariante Ableitung“ ∇ oder D . (nicht verwechseln!)

$$„\nabla = \partial + \Gamma“$$

Komponenten der Geschwindigkeit in ebenen Polar- Koordinaten - anschauliche Variante

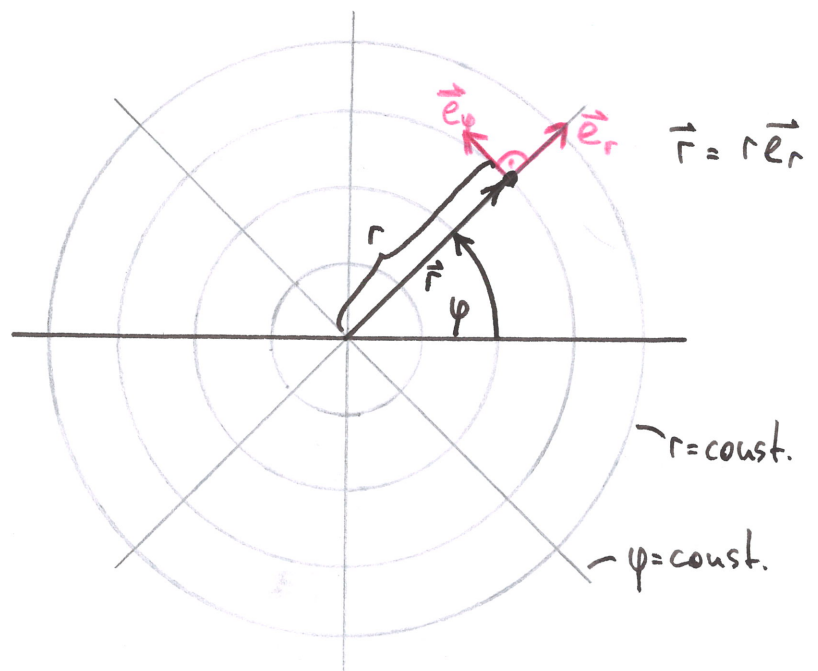
Wir wollen $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{x,y,z}$ überführen in die Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$,
also $\vec{v} = a\vec{e}_r + b\vec{e}_\varphi + c\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{r,\varphi,z}$.

Da der z-Teil trivial ist ($c = \dot{z}$), lassen wir ihn ab hier weg.
ebene Polarkoordinaten:

Beachte die Ab-
hängigkeit:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$$



Per Definition haben die Basisvektoren die Länge 1,

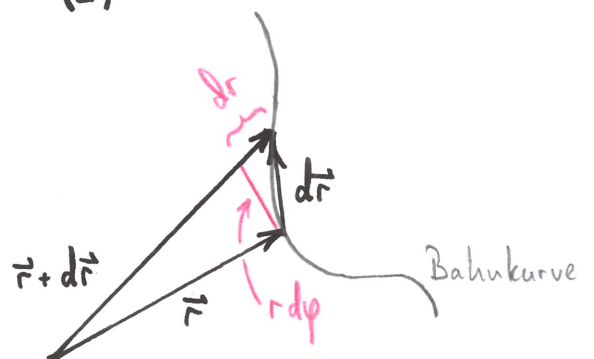
$$\vec{e}_r^2 = 1 = \vec{e}_\varphi^2, \quad (1)$$

und stehen senkrecht aufeinander,

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0. \quad (2)$$

Betrachte infinitesimale
Verschiebung:

$$d\vec{r} = r d\varphi \vec{e}_\varphi + dr \vec{e}_r$$



$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}}}$$

andererseits: $\vec{r} = r\vec{e}_r \xrightarrow{\frac{d}{dt}}$ Kettenregel $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$

Vergleich: $\underline{\underline{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}}$

Bestimmen jetzt noch die Beschleunigung. Dazu brauchen wir $\dot{\vec{e}}_\varphi$. Ansatz: $\dot{\vec{e}}_\varphi = \alpha\vec{e}_r + \beta\vec{e}_\varphi$

(1) liefert $\frac{d}{dt}(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) = 2\vec{e}_\varphi \dot{\vec{e}}_\varphi = 0 \Rightarrow \vec{e}_\varphi \perp \dot{\vec{e}}_\varphi$

(2) liefert $\frac{d}{dt}(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi) = \vec{e}_r \dot{\vec{e}}_\varphi + \vec{e}_\varphi \dot{\vec{e}}_r = 0$

$\Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \vec{e}_r \dot{\vec{e}}_\varphi = \alpha = -\vec{e}_\varphi \dot{\vec{e}}_r = -\dot{\varphi}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi$$

$$= \underline{\underline{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi}}$$

Vorteil dieser Methode: anschaulich, einfach, verständlich

Nachteil: \cdot der Ausdruck für $d\vec{r}$ wurde nicht bewiesen

\cdot klappt nur für "leicht vorstellbare" Koordinaten

Im allgemeinen Fall benutzt man besser die Transformation der Basisvektoren aus dem Skript: $\vec{b}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i$

(Vergleiche zur Herleitung mit dem Bem. zum Tangentialraum)

Grundgesetze der Dynamik, Kräfte

Zentrales Axiom: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$

- Bem:
- m steht für die Trägermasse und soll zeitlich konstant sein.
 - Hier: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Wir setzen stillschweigend die Unabhängigkeit von der Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ voraus.
(→ Elektron?!)

Grundaufgaben:

1. Berechnung der Kraft \vec{F} , wenn $\vec{r}(t)$ bekannt ist.
→ Das ist leicht!
2. Berechnung von $\vec{r}(t)$ bei bekanntem \vec{F} .
→ Das kann beliebig kompliziert sein!

Wir betrachten meist konservative Kräfte. Diese...

- a) besitzen ein Potential U , definiert durch $\vec{F} = -\text{grad } U$;
- b) sind wirbelfrei, $\text{rot } \vec{F} = 0$;
- c) verrichten auf geschlossenen Wegen keine Arbeit,
 $W = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$ (Energieerhaltung!).

- Bem:
- Alle 3 Punkte sind äquivalent.
 - Das Potential bildet ein vollständiges Differential, d.h.
$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$
 - Konservativität impliziert Zeit- und Geschwindigkeitsunabhängigkeit der Kraft.

zu a): $m\vec{a} = -\text{grad } U \rightarrow$ Ein Massenpunkt folgt dem Potentialgefälle ($\text{grad } U$), um seine Energie (potentielle) zu minimieren. Das tut er, indem er dorthin beschleunigt.

\rightarrow Konzept der Kraft nur ein Zwischenschritt.

zu b): Das folgt direkt aus a) mit $\text{rot grad.} = 0$.

Man findet damit:

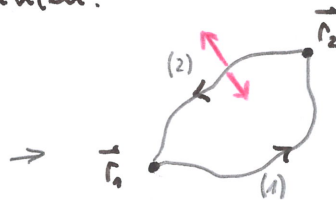
$$\partial_y \bar{F}_x = \partial_x \bar{F}_y, \quad \partial_z \bar{F}_y = \partial_y \bar{F}_z, \quad \partial_x \bar{F}_z = \partial_z \bar{F}_x.$$

zu c): Auch das folgt direkt aus a):

$$\oint \text{grad } U \, d\vec{r} = \oint \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \oint \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \\ = \oint dU = U_{\text{Ende}} - U_{\text{Anfang}} = 0.$$

\Rightarrow Arbeit sogar gänzlich wegunabhängig, nur Anfangs- und Endpunkt zählen!

(2) ändern und
(1) festhalten



Bsp. einer nicht-konservativen Kraft: Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -\gamma \dot{\vec{x}}$$

Eigentlich existieren nicht-konservative Kräfte nur näherungsweise (\rightarrow Energieerhaltung, Diskussion; Reibungskraft elektromagn.).

Beispiele zum Nachrechnen:

a) $\vec{F} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$: nicht-konservativ

b) $\vec{F} = \vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{r})$: konservativ nur für $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

c) $\vec{F} = \frac{\vec{\alpha} \times \vec{r}}{(\vec{\alpha} \times \vec{r})^2}$: nicht-konservativ

Lösung der Bewegungsgleichung durch Quadratur

Vorbetrachtung: $\vec{F} = -\text{grad } U$ in 1 Dimension:

$$\overline{F}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} U = -\frac{d}{dx} U$$

$$\Rightarrow U(x) = -\int_{x_0}^x \overline{F}(x') dx'$$

Hierbei ist x_0 ein beliebiger Bezugspunkt, der wegen der Freiheit bei der Wahl des Potentialnullpunktes ins Spiel kommt.

Zeitableitung:

$$\underline{-\frac{d}{dt} U(x)} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \overline{F}(x') dx' = \int_{x_0}^x \left(\frac{d}{dt} \overline{F}(x') \right) dx'$$

$$\text{(Kettenregel)} = \int_{x_0}^x \left(\frac{d\overline{F}(x')}{dx'} \frac{dx'}{dt} \right) dx'$$

$$= \int_{x_0}^x \dot{x}' d\overline{F}(x') \stackrel{(\dot{x}_0=0)}{=} \dot{x} \overline{F}(x) \quad (*)$$

Jetzt Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = \overline{F}(x) \quad | \cdot \dot{x}$$

$$m\ddot{x}\dot{x} = \overline{F}(x)\dot{x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) (*)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 \right) = -\frac{d}{dt} U(x)$$

$$\rightarrow \frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - U(x) \quad , \quad E \text{ ist die Integrationskonstante!}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

$$\text{bzw. } t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{\pm dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]} \quad ||$$

Wir werden diese Form immer wieder benötigen.

Bsp: harmonischer Oszillator, $U(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x'^2}}, \quad \text{wählen } x_0 = 0, t_0 = 0$$

$$\omega t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x'^2}} = \arcsin\left(x \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t)}}$$

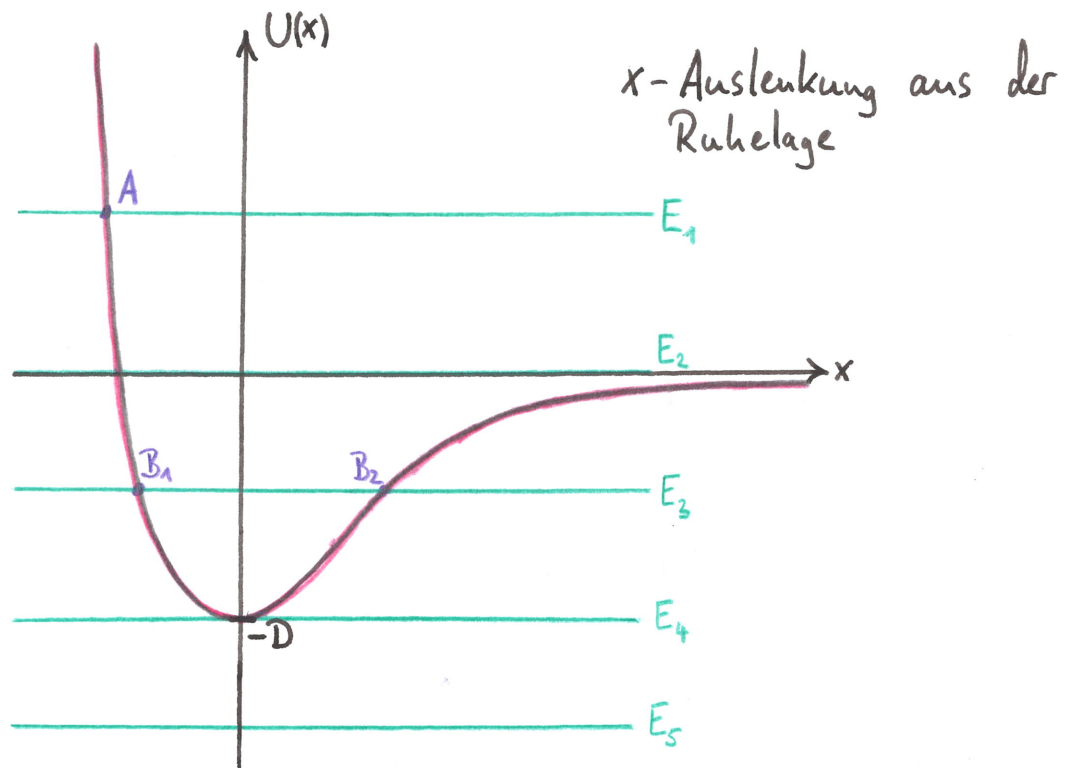
Bem:

- Bedeutung von t_0 : Phasenverschiebung
- Bedeutung von x_0 : Anfangsbedingung

Vorsicht: Als wir "+" gewählt haben, ging eine Lösung verloren!

Bewegung im Potential

am Beispiel des „Morse-Potentials“, $U(x) = D(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$;
beschreibt näherungsweise das 2-atomige Molekül



Diskussion der Bewegung für verschiedene Energien:

E_1 : freie Bewegung des Massenpunktes rechts von A, Reflexion bei A, da links davon verboten:

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} \quad \text{imaginär für } U(x) > E !$$

E_2 : wie E_1 , aber: $E - U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, also $dt \rightarrow \infty$

Das Unendliche ist dem MP nur mit verschwindender Geschwindigkeit $v(x \rightarrow \infty) = 0$ zugänglich.

Oder umgekehrt: ruht im ∞ , fällt hinein.

E_3 : „gebundener Zustand“, MP kann Gebiet zwischen B_1 und B_2 nicht verlassen; Schwingung um $x=0$ möglich

E_4 : Ruhe bei $x=0$.

E_5 : nicht erlaubt

Jetzt: Lösung für kleine Auslenkungen, $|x| \ll 1$.

Reihenentwicklung: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$

Wir entwickeln bis zur Ordnung z^2 :

$$U(x) = D \left(1 - 2\alpha x + 2\alpha^2 x^2 - 2 + 2\alpha x - \alpha^2 x^2 \right) + \mathcal{O}(x^3) \\ \approx D(\alpha^2 x^2 - 1)$$

→ Der erste Term ist das Potential eines harmon. Oszillators mit Frequenz $\omega = \alpha \sqrt{\frac{2D}{m}}$!

→ Der zweite Term ist eine konstante Nullpunktverschiebung und uninteressant!

Probe: $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -2D\alpha x$, linear mit „Federkonstante“ $2D\alpha^2$

Wir haben die Lösung bereits bei der Quadratur diskutiert. Hier noch eine Variante:

$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ Man sieht die Lösung sofort!

$$x_1 = B_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \quad x_2 = B_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \quad B_1, B_2 \in \mathbb{C}$$

allgemeine Lösung $x(t) = x_1 + x_2$.

3 äquivalente Formulierungen: $x(t) = B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}$
(beachte: $k = m\omega^2$) $x(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$
 $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Bem: Bei Dämpfung funktioniert die Quadratur nicht, da die Energie dann keine (Integrations-)Konstante ist. Siehe dazu MMdPI.

Erhaltungssätze – Die ersten Integrale der Bewegung

$$\text{Energie: } E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$$

$$\text{Drehimpuls: } \vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Sind beide Größen erhalten, also $\frac{d}{dt} E = 0 = \frac{d}{dt} \vec{L}$, so muss es sich um eine Zentralkraft handeln (durch den Abstand zu einem „Kraftzentrum“ bestimmt):

$$\vec{F} = \vec{r} f(r, \dot{r}, t)$$

Wir fordern die Existenz eines Potentials, also

$$\vec{F} = \vec{r} f(r) \quad , \quad \text{sodass} \quad \vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r$$
$$\Rightarrow U(r) = -\int_{r_0}^r r' f(r') dr' .$$

Wir wählen als Bezugspunkt $r_0 = \infty$. Dann gibt $U(r)$ die Arbeit an, die verrichtet werden muss, um sich aus dem ∞ bis auf den Abstand r aus Kraftzentrum anzunähern.

Wählen weiterhin die Ebene der Bewegung und dort ebene Polarkoordinaten:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad L = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + U(r) \quad \text{Bilanzgleichung}$$

Mit $d\varphi = \frac{L}{m r^2} dt$ folgt (wie früher)

$$d\varphi = \pm \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - L^2/r^2}}$$

$$\text{bzw. } \varphi - \varphi_0 = \pm L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U(r')] - L^2/r'^2}}$$

Somit ist die Bahnkurve $r(\varphi)$ vollständig bestimmt

und wegen $\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)}$ die gesamte Bewegung.

Oft Diskussion anhand des Ersatzpotentials

$$\bar{U} \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + U(r), \quad \text{sodass alles wieder die Form}$$

wie im 1-dimensionalen Fall hat.

Bem: Stellt man sich dazu eine „Ersatzkraft“

$\vec{F} = -\partial_r \bar{U}$ vor, so hat sie einen zusätzlichen Anteil $\frac{L^2}{mr^3}$. Der Drehimpuls wirkt sich also wie eine repulsive Kraft ($\sim r^{-3}$) aus.

Die Bewegung im Ersatzpotential:

Betrachten attraktives Potential, $U(r) \leq 0$

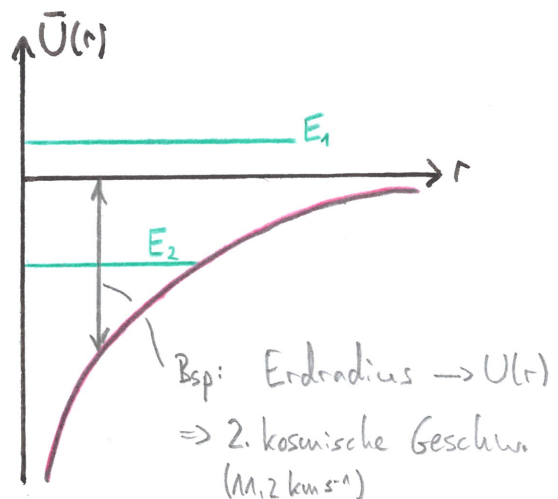
(z.B. Gravitationspotential $U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$).

Fall $L=0$

Ein Massenpunkt stürzt ins Kraftzentrum, selbst wenn er im ∞ mit $v \rightarrow 0$ startet.

E_1 : kann entkommen (Rakete)

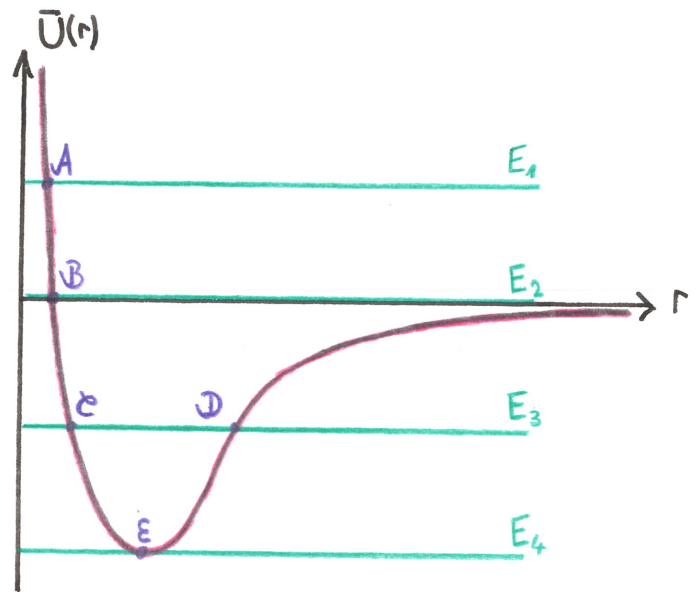
E_2 : gefangen



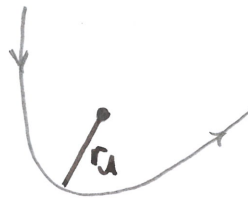
Fall $L > 0$

(nur für nicht zu stark fallendes $U(r)$!)

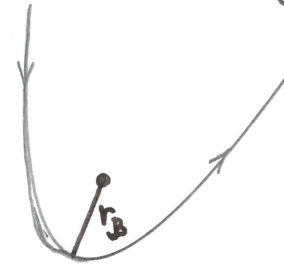
- E_1 :
- MP mit Anfangsgeschw. im ∞
 - nähert sich bis zum Punkt A, um dann umzukehren
- Hyperbelbewegung



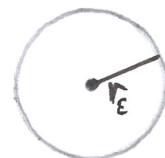
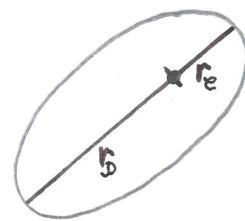
- E_2 :
- wie E_1 , jedoch mit verschwindender Geschwindigkeit im ∞ → Parabelbahn



- E_3 :
- ∞ kann nicht erreicht werden
 - periodische Bewegung zwischen C und D möglich
- Ellipsenbahn



- E_4 :
- „stationäre Bewegung“, nur 1 Radius möglich
- Kreisbahn



- Bem:
- Um einen Massenpunkt aus $r = \infty$ einzufangen zu können, muss er Energie verlieren.
 - Für $r \rightarrow 0$ spielt früher oder später die Ausdehnung des Kraftzentrums eine Rolle (z.B. Planetenoberfläche).

Was bedeutet $L > 0$ bei ungebundenen Bewegungen?



Ohne Kraft würde der MP im Abstand ϱ vorbeifliegen, in beiden Fällen ist aber der Drehimpuls erhalten.

Daher auch mit Kraft: $\vec{L} = \vec{\varrho} \times \vec{p} = m\varrho v_\infty \vec{e}_z$.

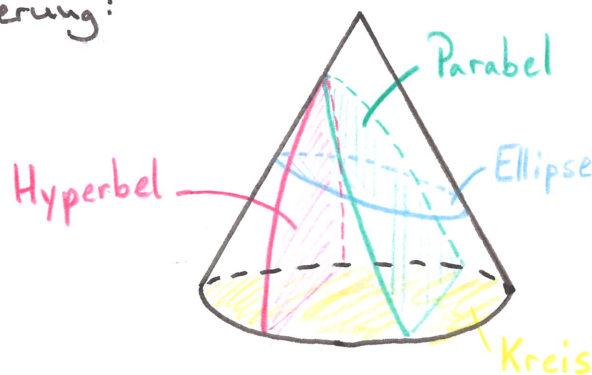
Für $\varrho = 0$ kann der MP ins Kraftzentrum stürzen.

Vorsicht: Im vorhergehenden Teil meinten wir mit „verschwindender Geschwindigkeit im ∞ “ nicht \vec{v}_∞ , sondern dessen Radialteil!

Bem:

- ϱ heißt Stoß- oder Impact-Parameter.
- Bei ungebundenen Bewegungen spricht man allgemein von Streuung.
- Für $L > 0$ spricht man von Bewegungen auf Kegelschnitten.

Erinnerung:



Die Kosmischen Geschwindigkeiten

1. Kosm. Geschw. v_1 :

→ Mindestgeschwindigkeit, um einem Satelliten die Erdoberfläche unzugänglich zu machen.

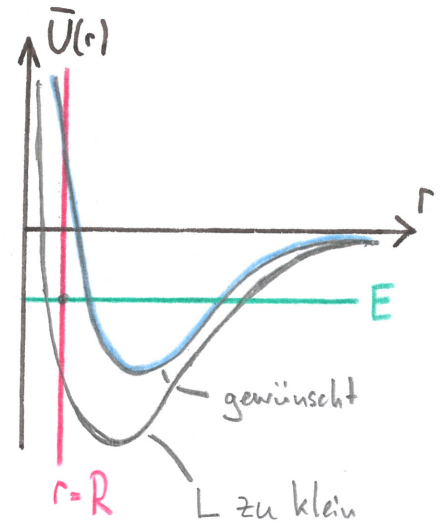
$$\bar{U}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r),$$

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\bar{U}(R) \stackrel{!}{=} E_{\text{kin}}^{\text{min}}$$

$$\frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2, \quad L = Rmv_1$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \underline{\underline{7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$



R - Erdradius
 M - Erdmasse

2. Kosm. Geschw. v_2 :

→ Mindestgeschwindigkeit, um der Erdanziehung zu entkommen.

gerader Abschuss: $L=0$; $r=\infty$ ($E=0$) soll zugänglich sein

$$0 = \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \underline{\underline{11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

3. Kosm. Geschw. v_3 :

→ Mindestgeschwindigkeit, um das Sonnensystem verlassen zu können.

Zum Erdschwerefeld kommt das der Sonne hinzu; es kann die kinetische Energie der Erde genutzt werden.

2. kosm. Geschw. der Sonne:

$$v_2^{\odot} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{E-S}}} = 42,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Ausnutzen der Erdgeschwindigkeit $v_0^{\oplus} = 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$\rightarrow \tilde{v}_2 = v_2^{\odot} - v_0^{\oplus} = 12,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

gesamte benötigte kinet. Energie:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^{\odot} + E_{\text{kin}}^{\oplus} \quad \Rightarrow \quad v_3^2 = \tilde{v}_2^2 + (v_0^{\oplus})^2$$

$$\underline{\underline{v_3 = 16,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

(Man kann auch die Rotation der Erde ausnutzen.)

4. Kosm. Geschw. v_4 :

→ Mindestgeschwindigkeit zum Verlassen der Milchstraße.

$$\underline{\underline{v_4 = 100 \frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

(unter Ausnutzung der Rotation des Sonnensystems um das Zentrum der Galaxie)

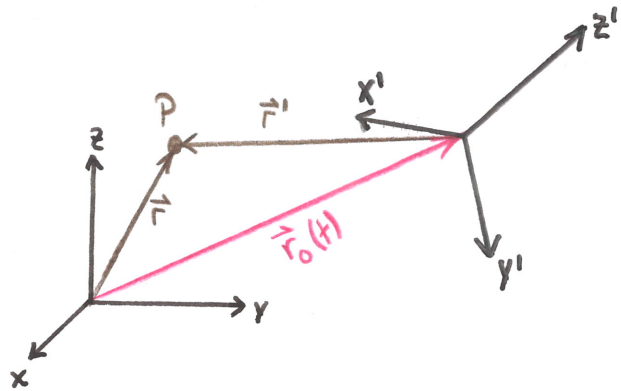
Beliebig beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten ein KS $\Sigma: (x, y, z)$ und ein KOS $\Sigma': (x', y', z')$, das bzgl. Σ beliebig zeitabhg. verschoben und verdreht ist.

Ortsvektor eines beliebigen Punktes P:

$$\Sigma: \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\Sigma': \vec{r}' = x'\vec{e}'_x + y'\vec{e}'_y + z'\vec{e}'_z$$



Von Σ aus gesehen sind $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$ zeitabhängig und

$$\vec{r} = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t).$$

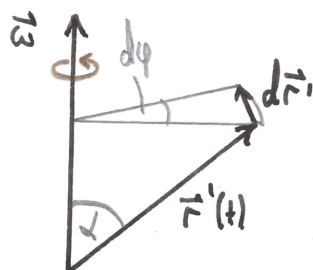
Die Geschwindigkeit des (bewegten) Punktes P:

$$\text{in } \Sigma': \vec{v}' = \dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z$$

(Ein mitrotierender Beobachter sieht keine Zeitabhängigkeit der $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$!)

$$\text{in } \Sigma: \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\dot{x}'\vec{e}'_x + \dot{y}'\vec{e}'_y + \dot{z}'\vec{e}'_z}_{\dot{\vec{r}}'} + \underbrace{x'\dot{\vec{e}}'_x + y'\dot{\vec{e}}'_y + z'\dot{\vec{e}}'_z}_{\text{Terme durch Rotation}}$$

entsprechen der Bewegung eines in Σ' ruhenden Punktes, der also von Σ aus gesehen starr mit Σ' mitrotiert



$$\text{offenbar: } d\vec{r}' \perp \vec{r}' \\ d\vec{r}' \perp \vec{\omega}$$

$$|d\vec{r}'| = d\phi \sin \alpha |\vec{r}'|, \quad d\phi = \omega dt$$

$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}'| = |\vec{r}'| \omega \sin \alpha$ sind $\dot{\vec{r}}'$ (Betrag des Kreuzproduktes $\vec{\omega} \times \vec{r}'$)

Damit
$$x' \dot{\vec{e}}_x' + y' \dot{\vec{e}}_y' + z' \dot{\vec{e}}_z' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

und insgesamt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

\uparrow \uparrow \nwarrow
 Zeitableitung im Inertialsystem $\frac{d}{dt}$ Zeitableitung im nicht-IS, schreiben $\frac{d'}{dt}$

Das heißt: Sind die Komponenten eines Vektors bzgl. des nicht-IS bekannt ($\vec{r}' = x' \vec{e}_x' + y' \vec{e}_y' + z' \vec{e}_z'$), dann lässt sich die Zeitableitung bzgl. des IS bestimmen:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}' = \frac{d'}{dt} \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Man schreibt die Operatorgleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \omega \times}$$

Kraftgesetz:
$$\vec{F} = m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}' = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \vec{r}'_0 + \frac{d'}{dt} \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right)$$

Punkte über gestr. Größen $\hat{=} \frac{d'}{dt}$

$$= m \ddot{\vec{r}}_0 + m \ddot{\vec{r}}' + m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m \ddot{\vec{r}}_0 - \underbrace{m \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{"Euler-Kraft"}} - \underbrace{2m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{Corioliskraft}} \quad ||$$

\uparrow \uparrow
 äußere Kraft Trägheit

\rightarrow Kraftbilanz mit Scheinkräften für Beobachter in Σ' .

in der Vorlesung mit zeitabhängiger Transformationsmatrix:

$$\vec{r}' = \hat{O}(t) \underbrace{(\vec{r} - \vec{r}_0(t))}_{\text{in } \Sigma} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \underbrace{\hat{O}^{-1}(t)}_{\text{in } \Sigma} \vec{r}' + \vec{r}_0(t)$$

Das führte auf

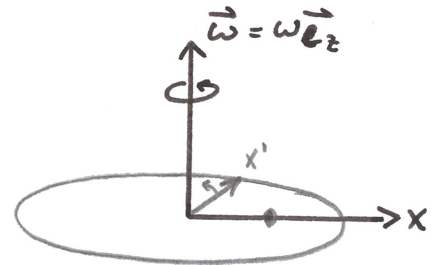
$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_{x'} &= \omega_3 \vec{e}_{y'} - \omega_2 \vec{e}_{z'} \\ \dot{\vec{e}}_{y'} &= \omega_1 \vec{e}_{z'} - \omega_3 \vec{e}_{x'} \\ \dot{\vec{e}}_{z'} &= \omega_2 \vec{e}_{x'} - \omega_1 \vec{e}_{y'} \end{aligned}$$

was ebenfalls den $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ -Term liefert.

Bsp: Massenpunkt auf konstant rotierendem Karussell

$$m \ddot{\vec{r}}' = \cancel{\vec{F}} - \cancel{m \ddot{\vec{r}}_0} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \cancel{m \ddot{\vec{r}}_0} \times \vec{r}' - 2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

$$m \ddot{\vec{r}}' = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y' \\ \omega x' \\ 0 \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} -\omega y' \\ \omega x' \\ 0 \end{pmatrix}$$



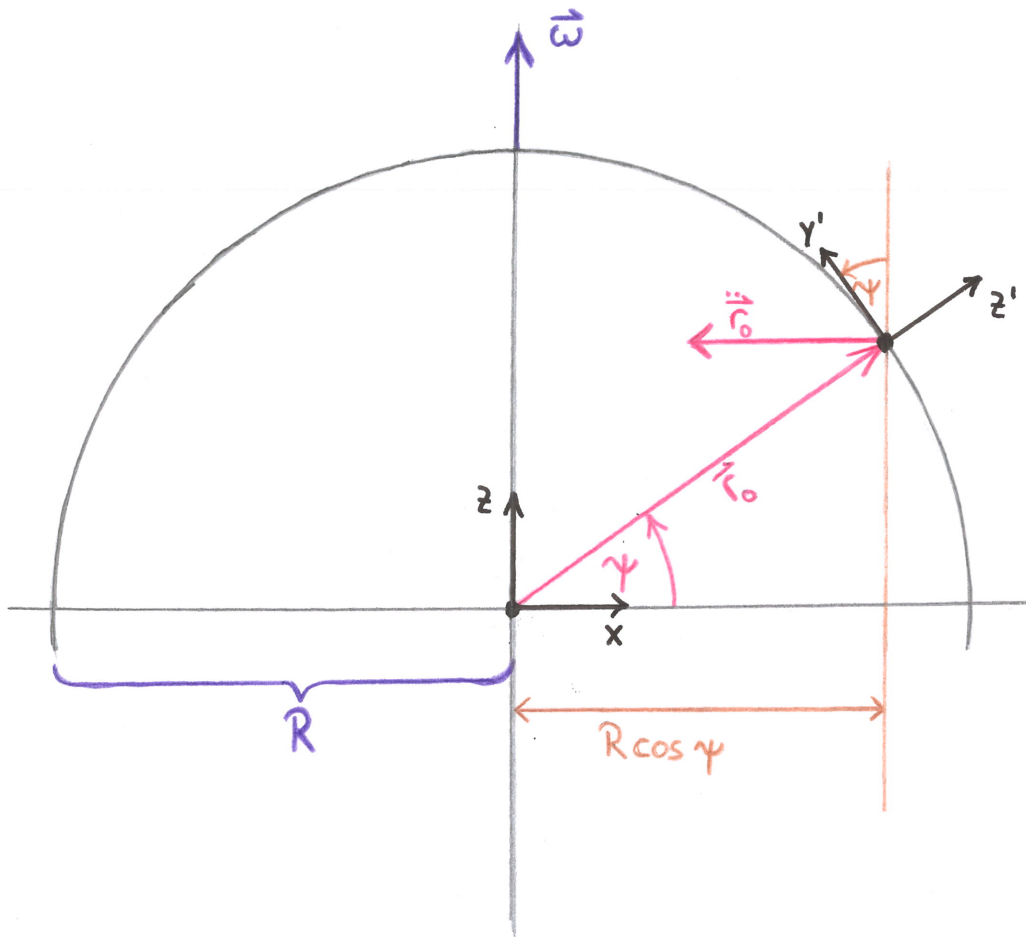
$$\Rightarrow \bar{F}_{x'} = m\omega^2 x' + 2m\omega \dot{y}'$$

$$\bar{F}_{y'} = m\omega^2 y' - 2m\omega \dot{x}'$$

$$\bar{F}_{z'} = 0$$

- Bem:
- Die Corioliskraft wirkt senkrecht zur Geschwindigkeit in Σ' .
(\rightarrow Meteorologie: Umlaufsin von Tiefdruckgebieten, ...)
 - Die Scheinkräfte können stets wegtransformiert werden, indem man in ein IS wechselt.
 - Beobachtung: Alle Scheinkräfte hängen von der Masse ab, was sonst nur auf die Gravitationskraft zutrifft.
 \rightarrow Kann man sie vielleicht auch wegtransformieren?
Antwort: Lokal ja!

Bewegung auf der rotierenden Erde



geometrische Betrachtung:

$$\begin{cases} \vec{e}_x = -\sin \omega t \vec{e}_{x'} - \sin \psi \cos \omega t \vec{e}_{y'} + \cos \psi \cos \omega t \vec{e}_{z'} \\ \vec{e}_y = \cos \omega t \vec{e}_{x'} - \sin \psi \sin \omega t \vec{e}_{y'} + \cos \psi \sin \omega t \vec{e}_{z'} \\ \vec{e}_z = \cos \psi \vec{e}_{y'} + \sin \psi \vec{e}_{z'} \end{cases}$$

(betrachte dazu zuerst $\psi=0$ und variiere t ; dann $t=0$ und $\psi \neq 0$; Normierung überprüfen)

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= R \cos \psi \cos \omega t \vec{e}_x + R \cos \psi \sin \omega t \vec{e}_y + R \sin \psi \vec{e}_z \\ \dot{\vec{r}}_0 &= R \cos \psi (-\omega \sin \omega t \vec{e}_x + \omega \cos \omega t \vec{e}_y) \\ \ddot{\vec{r}}_0 &= -R \omega^2 \cos \psi (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y) \end{aligned}$$

Übergang zu gestrichelten Größen:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \dots = \underline{R \omega^2 (\sin \psi \cos \psi \vec{e}_{y'} - \cos^2 \psi \vec{e}_{z'})} \quad (\text{wie erwartet zeitunabh.})$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z = \omega (\cos \psi \vec{e}_{y'} + \sin \psi \vec{e}_{z'})$$

Erinnerung:

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m \ddot{\vec{r}}_0 - \underbrace{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugal}} - \underbrace{m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{Euler}} - \underbrace{2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}}$$

- Erde: - sollte nicht beschleunigt rotieren, $\dot{\vec{\omega}} = 0$
 - Abspaltung der Gravitationskraft: $\vec{F} = \vec{F}^{(\text{ext})} - mg \vec{e}_{z'}$

Näherung: langsam rotierende Erde, also ω klein + kleine Abstände r'
 \rightarrow Wir rechnen in der Ordnung von r' und lassen höhere Ordnungen weg, $r' \omega^2 \approx 0$.

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}^{(\text{ext})} - mg \vec{e}_{z'} - m \ddot{\vec{r}}_0 - 2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

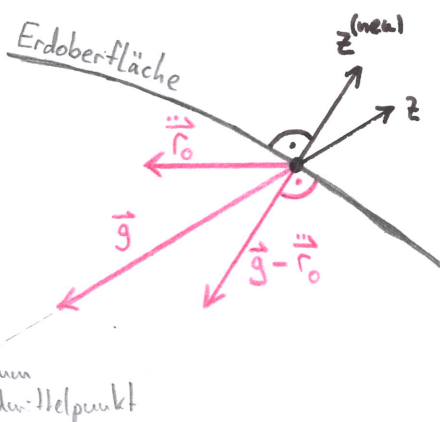
Ab hier lassen wir die Striche weg, da uns das ursprüngliche IS nicht mehr interessiert.

Beachte: Die Kraft $m \ddot{\vec{r}}_0$ wirkt auch auf die Erdoberfläche!

Diskussion Abplattung der Erde:

$\vec{g} = -g \vec{e}_z$, Abplattung genau so, dass $\vec{g} - \ddot{\vec{r}}_0$ senkrecht auf der Erdoberfläche steht

\rightarrow Illustration mit GeoGebra!



wählen neue z -Achse, sodass $\vec{g} - \ddot{\vec{r}}_0$ nur noch z -Anteil hat.

$$\text{Damit: } -g \vec{e}_z - \ddot{\vec{r}}_0 =: -\tilde{g} \vec{e}_z$$

Das ist nun die tatsächlich gemessene, (wegen $\ddot{\vec{r}}_0$) Breitengrad-abhängige Fallbeschleunigung.

Näherung: Für die Coriolis-Kraft möge der Wechsel zur neuen z-Achse vernachlässigbare Konsequenzen haben.

Wir lassen nun die Tilde wieder weg und geben uns mit der neuen Kraftbilanz zufrieden:

$$\underline{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(ext)} - mg\vec{e}_z - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}}$$

Komponentenweise:

$$m\ddot{x} = F_x^{(ext)} - 2m\omega(\dot{z}\cos\psi - \dot{y}\sin\psi)$$

$$m\ddot{y} = F_y^{(ext)} - 2m\omega\dot{x}\sin\psi$$

$$m\ddot{z} = F_z^{(ext)} - mg + 2m\omega\dot{x}\cos\psi$$

Für vertikale Bewegungen (Fall) nähert man $\dot{y} \approx 0 \approx \dot{x}$, für horizontale Bewegungen wählt man $z=0$.

Integration der Bewegungsgleichungen:

(a) Fall aus Höhe h

$$\begin{array}{l} m\ddot{x} = -2m\omega\dot{z}\cos\psi \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Ableiten}} \\ \xrightarrow{\text{Einsetzen}} \end{array} \quad \begin{array}{l} m\ddot{x} = -2m\omega\dot{z}\cos\psi \\ \underline{\ddot{x} = 2\omega\dot{z}\cos\psi} \end{array}$$

Damit haben wir die DGLn entkoppelt und können lösen!

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{z}\cos\psi + A$$

$$\dot{x} = \omega\dot{z}\cos\psi t^2 + At + B$$

$$x = \frac{\omega\dot{z}}{3}\cos\psi t^3 + \frac{1}{2}At^2 + Bt + C$$

Mit Anfangsbedingungen $x(t=0) \stackrel{!}{=} 0$, $\dot{x}(t=0) \stackrel{!}{=} 0$, $\ddot{x}(t=0) \stackrel{!}{=} 0$:

$$\underline{x(t) = \frac{\omega\dot{z}}{3}\cos\psi t^3}$$

Und mit $z(t=0) \stackrel{!}{=} h$:

$$\underline{z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h}$$

Beachte: Die Auswirkungen der Corioliskraft sind von der Ordnung ω , also klein.

(b) horizontale Bewegung

Entkopplung wie in (a):

$$\ddot{x} = -4\omega^2 \sin^2 \gamma x + \text{const.}$$

$$\ddot{y} = -4\omega^2 \sin^2 \gamma y + \text{const.}$$

Lösen nur die 1. Gleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2} x + 4\omega^2 \sin^2 \gamma x = C$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2i\omega \sin \gamma \right) \underbrace{\left(\frac{d}{dt} - 2i\omega \sin \gamma \right) x}_{:= u(t)} = C$$

$$\rightarrow 1. \quad \dot{u} + 2i\omega \sin \gamma u = C$$

$$2. \quad \dot{x} - 2i\omega \sin \gamma x = u$$

Lösung beider Gleichungen durch Variation der Konstanten liefert eine Partikulärlösung.

\rightarrow allg. Lösung ist Summe aus Partikulärlsg. und Lösung des homogenen Teils ($C=0$)

Bsp: Zug mit 400t, $250 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf 51° nördl. Breite.

Corioliskraft von rund 3000 N nach rechts gegen die Schiene.

Systeme wechselwirkender Massenpunkte

System aus N Massenpunkten mit Koordinaten \vec{r}_n , $n=1, \dots, N$.

N Bewegungsgleichungen: $m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n = \vec{F}_n^{(int)} + \vec{F}_n^{(ext)}$

Interne Kräfte beruhen auf einem Wechselwirkungspotential zwischen den Massenpunkten (paarweise).

Der m -te Massenpunkt erfährt vom n -ten die Kraft

$$\vec{F}_{mn} = -\text{grad}_m U_{mn}.$$

Bem: • Die externen Kräfte werden ebenfalls durch U_{mn} verschlüsselt (n -unabhängiger Teil).

- Alle MP sind gleich beschaffen und vor dem Potential gleichberechtigt \rightarrow Symmetrie gegen Vertauschung zweier MP, $U_{mn} = U_{nm}$.

Andersherum: $\vec{F}_{nm} = -\text{grad}_n U_{mn}$

Actio = -Reactio: $\vec{F}_{mn} = -\vec{F}_{nm} \Rightarrow \text{grad}_n U_{mn} + \text{grad}_m U_{mn} = 0$

Einführung von Relativkoordinaten:

$$\vec{\xi} \equiv \vec{r}_n - \vec{r}_m, \quad \vec{\eta} \equiv \vec{r}_n + \vec{r}_m$$

- Bem:
- n und m sind festgehalten gedacht (dennoch beliebig).
 - Wegen $\vec{r}_n = \frac{1}{2}(\vec{\xi} + \vec{\eta})$ und $\vec{r}_m = \frac{1}{2}(\vec{\eta} - \vec{\xi})$ ist diese Abbildung offenbar bijektiv (zu jedem Paar n, m gehört genau ein Paar $\vec{\eta}, \vec{\xi}$). Wir verlieren also weder Freiheitsgrade noch kommen welche hinzu.

Mit der Kettenregel $\frac{\partial}{\partial x_m} = \frac{\partial \eta_x}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial \eta_x} + \frac{\partial \eta_y}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial \eta_y} + \frac{\partial \eta_z}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial \eta_z}$

und $\frac{\partial \eta_x}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} (x_n + x_m) = 1$, $\frac{\partial \eta_y}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} (y_n + y_m) = 0 = \frac{\partial \eta_z}{\partial x_m}$

folgt $\frac{\partial}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial \eta_x}$ (und analog für y_m, z_m).

Damit: $\text{grad}_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_m} \\ \frac{\partial}{\partial y_m} \\ \frac{\partial}{\partial z_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta_x} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta_z} \end{pmatrix} = \text{grad}_{\vec{\eta}}$

$\Rightarrow \text{grad}_m U_{mn} + \text{grad}_n U_{mn} = 2 \text{grad}_{\vec{\eta}} U_{mn} = 0$

Das heißt: U_{mn} ändert sich nicht mit $\vec{\eta}$, nur mit \vec{r} . Es ist also eine reine Funktion des Abstandes $\vec{r}_n - \vec{r}_m$.

Summation über alle Teilchenpaare, externes Potential extra geschrieben:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N U_{mn}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) + \sum_{n=1}^N U_n^{(\text{ext})}(\vec{r}_n)$$

↑
Hier wird die mehrfache Summation über dasselbe Paar ausgeschlossen.

Bsp: Zweikörperproblem

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{n=1}^2 \sum_{m=n+1}^2 \left(-G \frac{m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \right) = \underline{\underline{-G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}}$$

Virialsatz und N-Körper-Problem

→ zeitliches Mittel der kinet. Energie

Herleitung: Multiplikation der Bewegungsgleichungen mit \vec{r}_n und Summation:

$$\sum m_n \ddot{\vec{r}}_n \vec{r}_n = \sum \vec{F}_n \vec{r}_n$$

Mit $\frac{d}{dt} (m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n) = m_n \vec{r}_n \ddot{\vec{r}}_n + m_n \dot{\vec{r}}_n^2$:

$$\sum \frac{d}{dt} (m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n) - \underbrace{\sum m_n \dot{\vec{r}}_n^2}_{2T \text{ (Summe über kinet. Energien der MPe)}} = \sum \vec{r}_n \vec{F}_n = - \sum \vec{r}_n \text{grad}_n U$$

Einschub: Mittelbildung

diskret: $\bar{f} := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n)$ für Funktionen mit endlichem Wertebereich („einfache“ Funktionen)

für Funktionen mit abzählbarem Wertebereich:

$$\bar{f} := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n) \right), \text{ falls existent}$$

Hier brauchen wir kontinuierliche Mittelung:

$$\bar{f} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt \right]$$

Hier: Mittelung über alle Zeiten:

$$\frac{d}{dt} \sum (m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{d}{dt} \sum (m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n) dt \right]$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\tau} \left(\sum m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n \right) \Big|_0^{\tau} \right] = 0, \text{ sofern } \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n \text{ endlich für alle Zeiten!}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\bar{T} = \frac{1}{2} \sum \vec{r}_n \text{grad}_n U}} \quad \text{Virialsatz}$$

Anwendung: gravitatives N-Körper-Problem

Mit $\text{grad}_n U = \sum_{m \neq n} \text{grad}_n U_{mn}$ ist

$$\sum_{n=1}^N \vec{r}_n \text{grad}_n U = \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n} \vec{r}_n \text{grad}_n U_{mn} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N (\vec{r}_n - \vec{r}_m) \text{grad}_n U_{mn}$$

$$U_{mn} = -G \frac{m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}$$

$$\text{grad}_n U_{mn} = G \frac{m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^2} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_n - \vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}}_{\text{Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie}}$$

Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N G \frac{m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = -U$$

$$\rightarrow \text{Virialsatz: } \bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{U} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{2\bar{T} + \bar{U} = 0}}$$

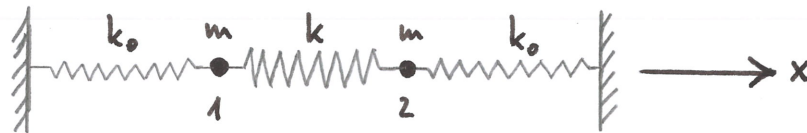
Mit Energieerhaltung ($E = \bar{E}$): $E = \bar{T} + \bar{U} = -\bar{T} < 0$

Die Gesamtenergie ist negativ!

Da die einzige Voraussetzung für die Gültigkeit des Virialsatzes $\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n < \infty$ war, lässt das vermuten, dass für positive Gesamtenergie mindestens einer der beteiligten Körper ins räumlich Unendliche entweichen muss.

Ein kleines Beispiel zu gekoppelten Schwingungen

Betrachten zwei durch Federn gekoppelte MP:



1. Notation:

Absolute Position des n-ten MP: $x^{(n)}$

Absolute Position der Ruhelage des n-ten MP: $x_0^{(n)}$

Auslenkung des n-ten MP aus seiner Ruhelage: x_n

$$\text{Also: } \begin{array}{l} x^{(1)} = x_0^{(1)} + x_1 \\ x^{(2)} = x_0^{(2)} + x_2 \end{array} \quad \left| \quad \text{Beachte: } \ddot{x}_0^{(n)} = 0$$

2. Bewegungsgleichungen:

$$(1) \quad m\ddot{x}^{(1)} = m\ddot{x}_1 = -k_0 x_1 - (x_1 - x_2)k$$

$$(2) \quad m\ddot{x}^{(2)} = m\ddot{x}_2 = -k_0 x_2 + (x_1 - x_2)k$$

Bem: Hier wäre auf direktem Wege eine Lösung möglich mittels Exponentialansatz $x_n = c_n e^{i\omega t}$.

Entkopplung der DGLn durch Addition und Subtraktion:

$$(1) + (2): \quad m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_0(x_1 + x_2)$$

$$(1) - (2): \quad m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k_0(x_1 - x_2) - 2k(x_1 - x_2) = -(k_0 + 2k)(x_1 - x_2)$$

Jetzt hängt jede Gleichung nur noch von jeweils einer der Normalkoordinaten, $\eta \equiv x_1 + x_2$ oder $\xi \equiv x_1 - x_2$, ab!

$$\text{Allg. Lsg.: } \begin{array}{l} \eta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad , \quad \omega_0 \equiv \frac{k_0}{m} \\ \xi(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \omega \equiv \frac{k_0 + 2k}{m} \end{array}$$

Es gibt zwei sog. "Normalschwingungen" (auch "Eigen-" oder "Fundamentalschwingungen"):

$A=0, B \neq 0$: gegenläufige Schwingung

$A \neq 0, B=0$: gleichläufige Schwingung

Alle denkbaren Schwingungszustände lassen sich aus diesen beiden als Superposition erzeugen.

Bem: • Meist lassen sich die DGLn gekoppelter Schwingungen durch geeignete Linearkombinationen entkoppeln. Vorsicht: Keine Freiheitsgrade verlieren oder erzeugen!

• Unter Umständen braucht man auch den Energiesatz zur Lösung.

$$\begin{aligned} \text{Hier: } E = T + U &= T_1 + T_2 + U_1 + U_2 + U_{12} \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{k_0}{2} x_1^2 + \frac{k_0}{2} x_2^2 + \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2 \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

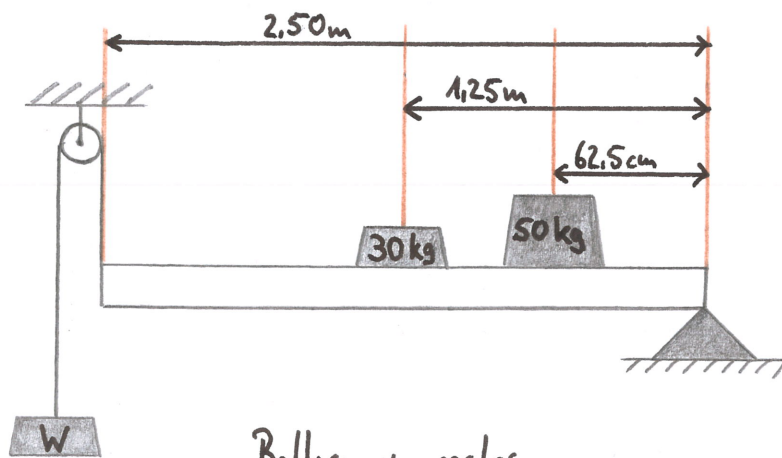
Virtuelle Verrückungen & virtuelle Arbeit

Diskussion am Beispiel

Welche Kraft muss aufgebracht werden, um die Anordnung in Waage zu halten?

bzw.

Wie groß ist W ?



Vorstellung: W bewegt sich 10cm nach unten

→ 30kg : 5cm nach oben

50kg : 2,5cm nach oben

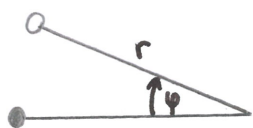
→ Erhaltung der potentiellen Energie:

$$0 = -10 \cdot W + 5 \cdot 30 \text{kg} + 2,5 \cdot 50 \text{kg} \Rightarrow \underline{W = 27,5 \text{kg}}$$

Wir haben eine virtuelle Verrückung betrachtet, um ein statisches Problem zu lösen!

→ gedachte (virtuelle) infinitesimale Verrückungen führen zu Gesetzen des Gleichgewichts, auch bei unbeweglichen Anordnungen

Betrachten jetzt nur das 50kg-Gewicht bei $l = 62,5 \text{cm}$.



Polarkoordinaten r, φ

Zwangsbedingung: $\varphi = 0$ (für Gleichgewicht)

virtuelle Ver., allgemein: $\delta \vec{r}_\alpha = \sum_i \delta x_\alpha^i \vec{b}_i$

müssen mit Zwangsbedingung „verträglich“ sein

→ hier: $\delta \vec{r} = \delta r \vec{e}_r$

Die Zwangskraft sorgt dafür, dass die Bedingung $g=0$ für alle Zeiten erfüllt ist (hier: Kompensation der Schwerkraft).

$$\Rightarrow \vec{Z} \sim \vec{e}_\varphi, \quad \vec{Z} \perp \vec{e}_r \quad \rightarrow \quad \vec{Z} \cdot d\vec{r} \sim \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_r = 0$$

→ Die Zwangskraft verrichtet bei virtuellen Verschiebungen keine Arbeit.

Allgemein: Abweichungen von $g=0$ müssen kompensiert werden, also $\vec{Z} = \lambda \text{grad } g$.

$$\text{hier: } \text{grad } g = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi$$

Lagrange I:

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{F} + \vec{Z} = \vec{F} + \lambda \text{grad } g$$

$$\text{Erinnerung: } \vec{\ddot{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Schwerkraft: } \vec{F} = -mg (\cos \varphi \vec{e}_\varphi + \sin \varphi \vec{e}_r)$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -mg \sin \varphi \\ (2) \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = -mg \cos \varphi + \frac{\lambda}{r} \end{array} \quad \Bigg|$$

$$\ddot{g} = \ddot{\varphi} = 0 \xrightarrow{(2)} \underline{\lambda = mr(2\dot{\varphi} + g \cos \varphi)}$$

$$\Rightarrow (2): \quad mr\ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\varphi = 0 = \text{const.}}, \quad \text{für } \varphi(t=0) \stackrel{!}{=} 0$$

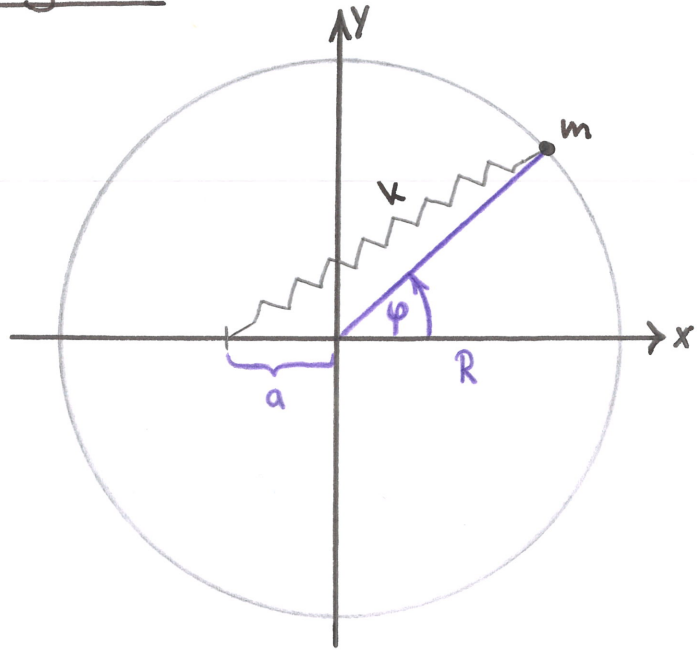
$$\Rightarrow (1): \quad m\ddot{r} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{r = l = \text{const.}}, \quad \text{für } r(t=0) \stackrel{!}{=} l$$

$$\text{Zwangskraft: } \vec{Z} = \lambda \text{grad } g = \underline{\underline{mg \vec{e}_\varphi}}$$

Bem: Virtuelle Verschiebungen sind instantan zu denken!
 Sonst gäbe es eine Bewegung von m in r -Richtung, sofern die Masse nicht "festgenagelt" ist. Das wiederum entspräche einer zusätzlichen Zwangsbedingung.

Beispielaufgabe zu Lagrange I

Ein Massenpunkt auf einer kreisförmigen Schiene mit exzentrischer Kraft.



A) kartesische Koordinaten

1. Zwangsbedingungen:

$$g_1 = z = 0$$

$$g_2 = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Bem: Die erste ZB ist überflüssig, wenn wir uns von Anfang an auf 2 Dimensionen beschränken.

2. Lagrange I:

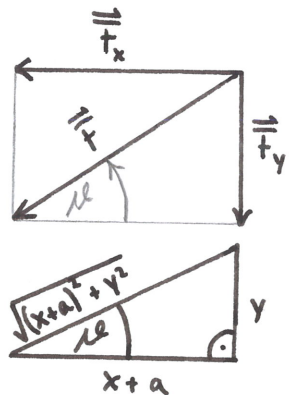
Die Länge der entspannten Feder sei vernachlässigbar klein.

→ Federkraft: $|\vec{F}| = k \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$

Kraftzerlegung:

$$\vec{F}_x = \vec{F} \cos \varphi = \vec{F} \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = k(x+a)$$

$$\vec{F}_y = \vec{F} \sin \varphi = ky$$



$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k(x+a) + 2\lambda_2 x \\ m\ddot{y} = -ky + 2\lambda_2 y \\ m\ddot{z} = \lambda_1 \end{cases}$$

(Beachte die Vorzeichen!)

3. Differentiation der Zwangsbedingungen:

$$\dot{g}_1 = \dot{z} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow z = 0 = \text{const.}, \text{ wenn } z(t=0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{g}_2 = \frac{d}{dt}(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) = 2(\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}) = 0$$

(Addition der beiden ersten Lagrange-Glu.):

$$\frac{2\lambda_2}{m}(x^2 + y^2) = \frac{kx}{m}(x+a) + \frac{ky^2}{m} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2$$

$$\rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{k(x^2 + ax + y^2) - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{x^2 + y^2}$$

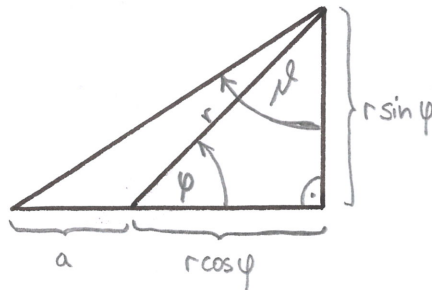
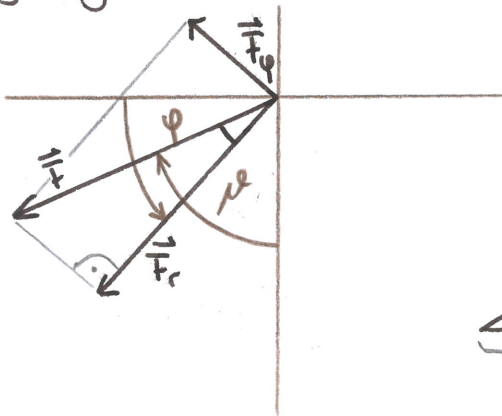
→ Einsetzen, Lösung suchen, ...

B) ebene Polarkoordinaten

1. Zwangsbedingung: $g = r - R = 0$, $\text{grad } g = \vec{e}_r$

2. Lagrange I: Kraftzerlegung $x = r \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi$



$$F_r = F \cos(\mu - (\frac{\pi}{2} - \varphi)) = F \left[\underbrace{\cos \mu}_{\sin \varphi} \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \underbrace{\sin \mu}_{\cos \varphi} \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) \right]$$

$$\cos \mu = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + (r \cos \varphi + a)^2}}, \quad \sin \mu = \frac{r \cos \varphi + a}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + (r \cos \varphi + a)^2}}$$

$$= F \frac{r + a \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi}} = \frac{k(r + a \cos \varphi)}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi}}$$

$$\left(F = k\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi} \right)$$

analog:

$$\vec{F}_\varphi = ka \sin \varphi$$

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -k(r + a \cos \varphi) + \lambda \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = ka \sin \varphi \end{cases}$$

3. Differentiation der ZB:

$$\ddot{g} = \ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow m r \dot{\varphi}^2 = k(r + a \cos \varphi) - \lambda \quad \rightarrow \quad \underline{\lambda = m r \dot{\varphi}^2 - k(r + a \cos \varphi)}$$

$$(1) \quad m \ddot{r} = 2 m r \dot{\varphi}^2 - 2k(r + a \cos \varphi)$$

$$(2) \quad m r \ddot{\varphi} = ka \sin \varphi - 2 \dot{r} \dot{\varphi} m$$

Energieerhaltung: $\frac{d}{dt} (T + U) \stackrel{!}{=} 0$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{k}{2} (a^2 + r^2 + 2ar \cos \varphi) \right]$$

$$= m \ddot{r} \dot{r} + m r \dot{\varphi}^2 + m r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + k(r \dot{r} + a r \dot{\varphi} \cos \varphi - a r \dot{\varphi} \sin \varphi) = 0$$

Setzen $m r^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}$ in (2) ein:

$$- m \ddot{r} \dot{r} - m r \dot{\varphi}^2 - k(r \dot{r} + a r \dot{\varphi} \cos \varphi - a r \dot{\varphi} \sin \varphi) = r \dot{\varphi} ka \sin \varphi - 2 m r \dot{\varphi}^2$$

mit (1):

$$a r \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{\dot{r}}{2k} (2 m r \dot{\varphi}^2 - m \ddot{r}) - r \dot{r}$$

$$\rightarrow - m r \dot{\varphi}^2 - m \ddot{r} \dot{r} - k r \dot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{r} \dot{r} + k r \dot{r} = - 2 m r \dot{\varphi}^2$$

$$\rightarrow \ddot{r} \left(\frac{m}{2} \dot{r} - m \dot{r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r(t) = R}, \quad \text{für } r(t=0) \stackrel{!}{=} R$$

(wussten wir eigentlich schon... aber: Energieerhaltung!)

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \quad \underline{\underline{\ddot{\varphi} = \frac{ka}{mR} \sin \varphi}} \quad \text{implizite Gl. für } \varphi(t)$$

Wir können für kleine Auslenkungen entwickeln:

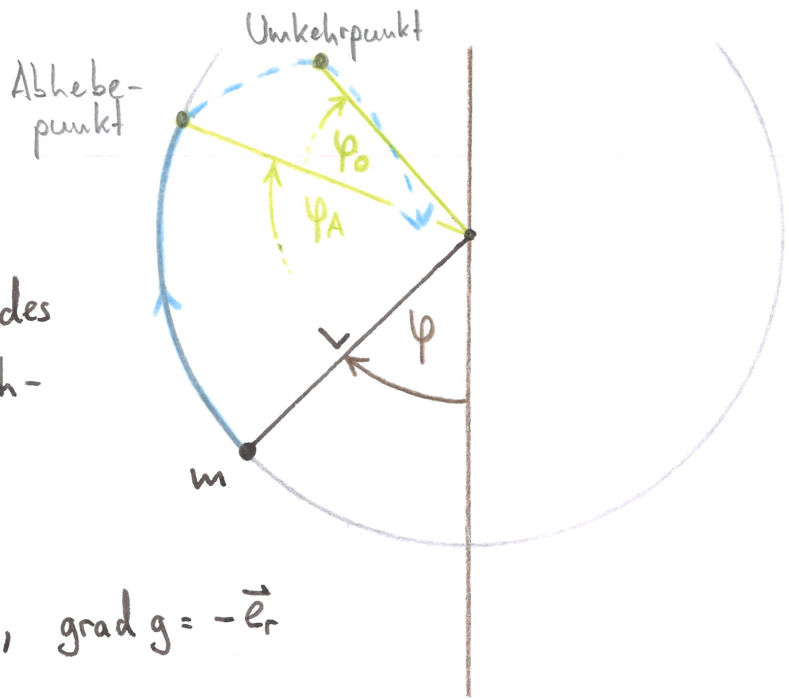
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{ka}{mR} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^3) \approx \frac{ka}{mR} \varphi$$

→ Exponential- oder sin/cos-Ansatz...

Einseitige Bindung - Fadenpendel

Prinzipiell sind alle Punkte innerhalb des Radius $r=L$ erreichbar.



→ Nebenbedingung:

$$g = L - r \geq 0, \quad \text{grad } g = -\vec{e}_r$$

Bis zum Abhebe-punkt bei φ_A kann man den Faden gedanklich durch eine Stange ersetzen und $g = L - r = 0$ schreiben.

Der Winkel φ_A ist durch einen Vorzeichenwechsel der Zwangskraft bestimmt. Ab dort: freier Fall.

$$\text{Lagrange I:} \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = mg \cos \varphi - \lambda \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = -mg \sin \varphi \quad (2)$$

$$\ddot{g} = \ddot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r = L = \text{const.}}$$

$$\left(\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \underline{\lambda = +m(L\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi)} \right)$$

Lösung mit (2) oder Energieerhaltung:

$$E = T + U = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + mgh = \frac{m}{2} L^2 \dot{\varphi}^2 + mgL(1 - \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mL^2} [E + mgL(\cos \varphi - 1)]}$$

$$\rightarrow \underline{t - t_0 \sim \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{a + b \cos \varphi'}}}$$

elliptisches Integral,
 $\varphi \leq \varphi_A$

Diskussion des Gültigkeitsbereiches:

$$\text{Zwangskraft } \vec{Z} = \lambda \text{grad } g = -m(L\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \vec{e}_r$$

wechselt VZ bei $L\ddot{\varphi}_A = -g \cos \varphi_A$.

→ offenbar: $\cos \varphi_A < 0$, also $\underline{\frac{\pi}{2} < \varphi_A < \frac{3\pi}{2}}$

Mit der Energiebilanz bei φ_A folgt:

$$\underline{\cos \varphi_A = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{E}{mgL} \right)}$$

- Für $E \leq mgL$ ist $\cos \varphi_A \geq 0$, also existiert kein Abhebe punkt. → „normale“ Pendelbewegung
- Für $E > \frac{5}{2}mgL$ ist $|\cos \varphi_A| > 1$, φ_A existiert also nicht. → Rotation bei ständig gespanntem Faden

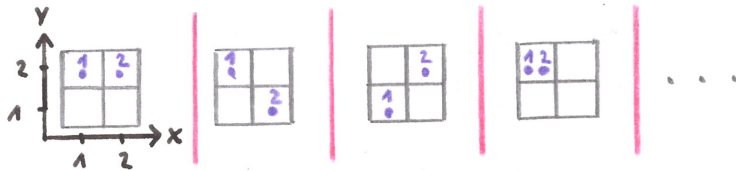
Allgem. Vorgehen bei einseitigen Bindungen:

- Behandlung wie bei vollständiger Bindung an die Fläche oder Kurve
- Gültigkeit der Lösung solange die ZK in Richtung des prinzipiell zugänglichen Gebietes zeigt
- beim VZ-Wechsel der ZK: Behandlung des MP als frei (bis er wieder die Fläche / Kurve erreicht)

Der Konfigurationsraum K

- Raum aller möglichen Konfigurationen eines MP-Systems.
- Für N Teilchen im 3-dim. Raum ist $\dim K = 3N$.

einfaches Bsp: 2 Teilchen, die jeweils nur 4 diskrete Positionen einnehmen können



$$x_1 = 1, y_1 = 2$$

$$x_2 = 2, y_2 = 2$$

$$(1, 2; 2, 2)$$

$$x_1 = 1, y_1 = 2$$

$$x_2 = 2, y_2 = 1$$

$$(1, 2; 2, 1)$$

...

$$\dots \text{ allg.: } (x_1, y_1; x_2, y_2)$$

Jede Kombination ist eine Konfiguration der Teilchen.

Konfigurationsraum:

$$K = \{(x_1, y_1; x_2, y_2) \mid x_i, y_i = 1, 2\}$$

$$= \{(1, 2; 2, 2), (1, 2; 2, 1), (1, 1; 2, 2), (1, 1; 1, 1), \dots\}$$

Jedes $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ ist ein Punkt im Konfigurationsraum, der offenbar 4-dimensional ist.

($\dim K = d \cdot N = 2 \cdot 2 = 4$, passt.)

Bem: Da hier nur diskrete, endlich viele Koordinaten betrachtet wurden, ist K endlich und abzählbar.

Im Allgemeinen hat K unendlich viele Elemente und ist überabzählbar.

Eine Nebenbedingung greift einen Unterraum von K auf,
genauer: eine $(3N-1)$ -dimensionale Hyperfläche.

Bsp:

a) Einzelnes Teilchen im \mathbb{R}^3 .

Dann entspricht dem Konfig.raum gerade der \mathbb{R}^3
(als Punktraum), $K \approx \mathbb{R}^3$.

Nebenbedingung: Bewegung nur in einer Ebene,

z.B. $z=0$

→ 2-dimensionale Ebene in K

b) Teilchen in Kästchen von vorher.

NB: Das zweite Teilchen darf nie oben sein
(4. Koordinate immer 1).

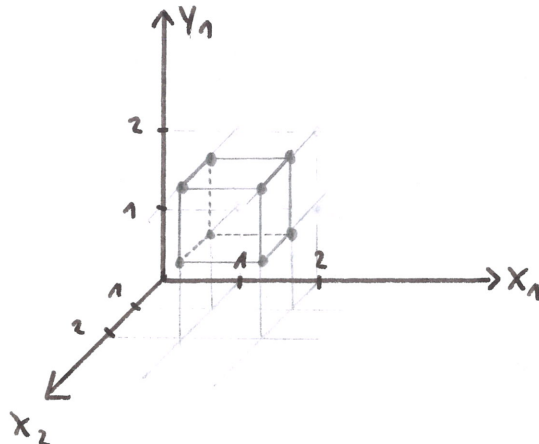
Das sollte also eine 3-dim. „Hyperebene“
ergeben!

→ Möglichkeiten (bei Unterdrückung der 4. Koordinate):

$(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2),$

$(2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)$

Das sind die Koordinaten der Ecken eines Würfels!



Energieerhaltung und Nebenbedingungen

Kraftbilanz des n -ten Teilchens bei N_2 Nebenbedingungen g_α ($\alpha = 1, \dots, N_2$):

$$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_2} \lambda_\alpha \text{grad}_n g_\alpha$$

Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}_n$, Summation über n :

$$\sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{r}}_n \dot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \dot{\vec{r}}_n + \sum_{n=1}^N \dot{\vec{r}}_n \sum_{\alpha=1}^{N_2} \lambda_\alpha \text{grad}_n g_\alpha$$

$$\text{Mit: } \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_n^2) = 2 \dot{\vec{r}}_n \ddot{\vec{r}}_n$$

$$\text{und: } \vec{F}_n \dot{\vec{r}}_n = -\text{grad}_n U \cdot \dot{\vec{r}}_n = - \begin{pmatrix} \partial U / \partial x_n \\ \partial U / \partial y_n \\ \partial U / \partial z_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ \dot{y}_n \\ \dot{z}_n \end{pmatrix}$$

$$= - \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dt} \right)$$

$$U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = U(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N)$$

$$\rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_N} dz_N$$

(Bem: Keine Zeitabhängigkeit des Potentials!)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \dot{\vec{r}}_n = - \frac{dU}{dt}$$

$$\text{Damit: } \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n^2 = - \frac{dU}{dt} + \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^{N_2} \dot{\vec{r}}_n \lambda_\alpha \text{grad}_n g_\alpha$$

Nun können die g_α von allen Koordinaten und explizit von der Zeit abhängen. Also (wie eben) mit der Kettenregel:

$$\frac{dg_\alpha}{dt} = \sum_{n=1}^N \underbrace{\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial y_n} \dot{y}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial z_n} \dot{z}_n \right)}_{\text{grad}_n g_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_n} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_n \lambda_\alpha \operatorname{grad}_n g_\alpha = -\lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

$$\text{Damit: } \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n^2}_{\frac{d}{dt} T} = -\frac{dU}{dt} - \sum_{\alpha=1}^{N_z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dt} (T+U) = - \sum_{\alpha=1}^{N_z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}}}$$

Das heißt: Zeitunabhängige NB erhalten die Energie.

Ein Energieverlust ist gleich der Leistung der Zwangskraft:

$$dW = d\vec{z} \cdot d\vec{r} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \\ \partial_z g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \lambda dg,$$

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = \lambda \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Bem: • Die virtuelle Arbeit der Zwangskraft ist immer Null, nicht jedoch die reale (W).

• Zeitabhängige NB sind gleich einem Verschwinden der Symmetrie des Systems gegen zeitliche Verschiebung. Nach dem „Noether-Theorem“ ist mit jeder Symmetrie eine Erhaltungsgröße verbunden; die Erhaltungsgröße der zeitlichen Symmetrie heißt Energie.

Zu anholonomen Zwangsbedingungen

Anholonome ZB können nicht als explizite Funktion der Koordinaten sondern nur als Differentialgleichung hingschrieben werden:

$$g_\alpha(\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_n, t) = \sum_{n=1}^N \dot{\vec{r}}_n \vec{f}_{\alpha n}(\vec{r}_n, t) + h_\alpha(\vec{r}_n, t) = 0.$$

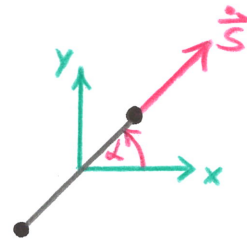
→ holonome ZB als Spezialfall $\vec{f}_n = 0$ enthalten

Bsp: Schlittschuh, modelliert durch zwei starr verbundene Massenpunkte

ZB: Geschwindigkeit darf nur in Richtung der Verbindungslinie zeigen,

$$\text{also } \dot{s}_y = \dot{s}_x \tan \alpha.$$

$$\rightarrow \underline{g = \frac{\dot{s}_y}{\dot{s}_x} - \tan \alpha = 0}, \quad \text{anholonom}$$



Diskussion: - Gäbe es eine Funktion $F(s_x, s_y, \alpha) = 0$, dann wäre für jeden Punkt (s_x, s_y) der Winkel α eindeutig bestimmt; es muss aber überall jeder Winkel möglich sein!

- Die Zahl der Freiheitsgrade ist „im Kleinen“ geringer als „im Großen“.

Bem:

- In „natürlichen“ Situationen kommen anholonome ZB nicht vor (Himmelsmechanik, Quantenmechanik, Teilchenphysik, ...).
- Für einen einzelnen MP (ohne innere Freiheitsgrade) allein sind keine anholonomen ZB bekannt.

Die Lagrange-Gleichungen II. Art

Idee „generalisierter“ Koordinaten: erfüllen automatisch die ZB

Koordinaten q_k , $k=1, \dots, 3N-N_z$; $N_F \equiv 3N-N_z$

$$\left. \begin{array}{l} \text{mit } x_n = x_n(q_k, t) \\ y_n = y_n(q_k, t) \\ z_n = z_n(q_k, t) \end{array} \right\} \text{zusammen: } x_a = x_a(q_k, t) \quad (a=1, \dots, 3N)$$

$(n=1, \dots, N)$

einfaches Bsp: 3 MP, die durch die ZB $g_{11213} = z_{11213} = 0$ an die x-y-Ebene gebunden sind

$$\{q_k; k=1, \dots, N_F\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\}, \quad N_z = 3, \\ N_F = 6$$

Wir versuchen zunächst, für die gener. Koordinaten eine Bewegungsgleichung (also einen Ausdruck für $q_k(t)$) zu finden.

• Kettenregel für infinitesimale Verrückungen:

$$\text{real: } dx_a = \sum_{k=1}^{N_F} \frac{\partial x_a}{\partial q_k} dq_k \quad (\text{Hier stehen } 3N \text{ Gleichungen.})$$

$$\text{virtuell: } \delta x_a = \sum_{k=1}^{N_F} \frac{\partial x_a}{\partial q_k} \delta q_k \quad (1)$$

• Kettenregel mit expliziter Zeitabhgk. der Geschwindigkeiten:

$$\dot{x}_a = \sum_{k=1}^{N_F} \frac{\partial x_a}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_a}{\partial t} \quad (2)$$

• virtuelle Arbeit & d'Alembert'sches Prinzip:

$$\delta W = \sum_{n=1}^N \vec{z}_n \cdot \delta \vec{r}_n = \sum_{a=1}^{3N} (m_a \ddot{x}_a - F_a) \delta x_a \stackrel{!}{=} 0$$

Bem: Bei dieser Zählweise sind immer 3

Massen gleich, also $m_1 = m_2 = m_3$, $m_4 = m_5 = m_6$, u.s.w.

$$\text{Mit (1): } \sum_{a=1}^{3N} (m_a \ddot{x}_a - \bar{F}_a) \sum_{k=1}^{N_F} \frac{\partial x_a}{\partial q_k} \delta q_k = 0,$$

ausmultipliziert:

$$\sum_{k=1}^{N_F} \left(\sum_{a=1}^{3N} m_a \ddot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} - \sum_{a=1}^{3N} \bar{F}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0$$

Da die Verrückungen unabhängig voneinander beliebig sind, muss die Klammer verschwinden!

(Setze z.B. $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_k = 0$, $k > 1$; dann $\delta q_2 \neq 0$, u.s.w.)

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{a=1}^{3N} m_a \ddot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} = \sum_{a=1}^{3N} \bar{F}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k}}$$

Da sich hier mittels $x_a = x_a(q_k, t)$ jede Größe durch q_k , \dot{q}_k , \ddot{q}_k und t ausdrücken lässt, haben wir N_F Gleichungen zur Bestimmung der $q_k(t)$ gefunden.

Wir wollen das nun durch kinetische und potentielle Energie ausdrücken.

braucht man nicht unbedingt ausrechnen

$$T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a^2, \quad \dot{x}_a = \sum_{l=1}^{N_F} \frac{\partial x_a}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_a}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial q_k} = \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a \left(\sum_{l=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_a}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_a}{\partial t \partial q_k} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k}$$

$$\left(\text{wegen } \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_k} = \delta_{lk} = \begin{cases} 1, & l=k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{a=1}^{3N} m_a \ddot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} + \sum_{a=1}^{3N} m_a \dot{x}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial x_a}{\partial q_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{x}_a \left[\sum_{l=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_a}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_a}{\partial q_k \partial t} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{a=1}^{3N} m_a \ddot{x}_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

Bem: • Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung vertauschen nach dem Satz von Schwarz.

• Die linke Seite lässt sich auch durch „generalisierte Kräfte“ ausdrücken:

$$Q_k := \sum_{a=1}^{3N} F_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k}$$

Wir setzen jetzt die Existenz eines Potentials voraus:

$$F_a = - \frac{\partial U}{\partial x_a}, \quad U = U(x_a, t) = U(q_k, t).$$

$$\rightarrow \sum_{a=1}^{3N} F_a \frac{\partial x_a}{\partial q_k} = - \sum_{a=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (= Q_k)$$

Wegen $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$ kann noch eine Null dazuaddiert werden:

$$- \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k}$$

Definition der Lagrange-Funktion eines Systems,

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) := T(q_k, \dot{q}_k, t) - U(q_k, t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}}$$

Lagrange-Gleichungen II. Art

- Bem:
- Da $k=1, \dots, N_F$, handelt es sich um N_F Differentialgleichungen.
 - Durch L und $x_a = x_a(q_k, t)$ ist ein System vollständig charakterisiert.
 - Koordinaten, von denen die Lagrange-Fkt. nicht explizit abhängt, heißen zyklisch. Jeder zyklischen Koordin. ist eine Erhaltungsgröße zugeordnet (siehe Noether-Theorem).
 - Zur Berechnung der Zwangskraft bestimme man aus der Lösung von L_{II} und mit Hilfe von $x_a = x_a(q_k, t)$ ~~sowie $\bar{F}_a(x_b)$~~ die \ddot{x}_a sowie die $\bar{F}_a(x_b)$. Dann: $Z_a = m_a \ddot{x}_a - \bar{F}_a$.
 - Für ein System N freier Massenpunkte erhält man mit den gener. Koord. $q_k = x_k = x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, z_N$ ($N_F = 3N$) sofort die Newton'schen Bewegungsgleichungen $m_k \ddot{x}_k = \bar{F}_k$ bzw. $m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n$ zurück.
 - Oft arbeitet man mit der Lagrange-Dichte, $L =: \int \mathcal{L} d^3r$.

Hinweis:

Oft bleibt noch Freiheit bei der Wahl des Koordinatensystems. Die entsprechende Bedingung darf erst in der Lagrange-Gleichung ausgewertet werden, nicht bereits in der Lagrange-Funktion!

Bsp: generalisierte Koord. = Kugelkoordinaten
 $\{q_k\} = \{r, \mu, \varphi\}$ (bspw. Planetenbewegung)

Interessiert man sich nur für die Bewegung in der Ebene $\mu = \frac{\pi}{2}$, dann darf diese Forderung erst eingesetzt werden, nachdem die Ableitungen von L bestimmt wurden.

Zusatz: Der Grund dafür: Im Sinne der Variationsrechnung ist L keine Funktion, sondern ein Funktional $L[r(t), \mu(t), \varphi(t), \dot{r}(t), \dot{\mu}(t), \dot{\varphi}(t); t]$ der gener. Koord. (die wiederum Funktionen des reellen Parameters t sind).

Körperfeste Bezugssysteme

Erinnerung: Für die Zeitableitung bezüglich eines IS gilt

$$\frac{d}{dt} \cdot = \frac{d'}{dt} \cdot + \vec{\omega} \times \cdot$$

Anwendung auf körperfeste rotierende Bezugssysteme:

Position des i -ten Massenpunktes:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_T + \vec{r}'_i$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{u}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}_i$$

$$= \frac{d}{dt} \vec{r}_T + \frac{d}{dt} \vec{r}'_i = \vec{v}_T + \frac{d'}{dt} \vec{r}'_i + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

$$= \underline{\vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i}$$

→ Translationsanteil + Rotationsanteil

Was passiert beim Wechsel des Nullpunktes von Σ' ?

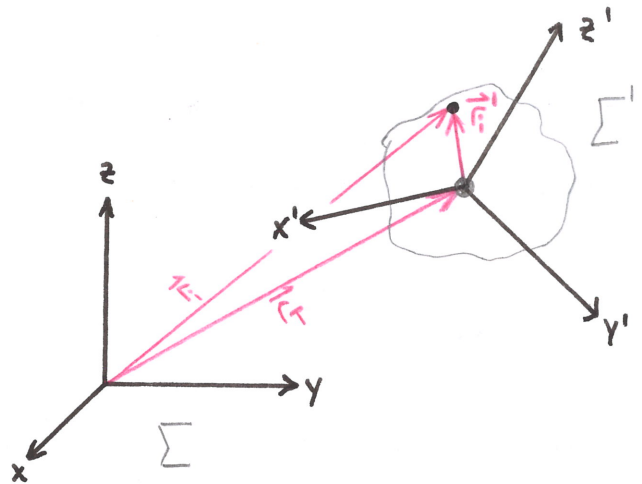
Betrachten ein zweites, um \vec{a} verschobenes körperfestes Bezugssystem Σ'' :

$$\vec{r}_i'' = \vec{r}'_i + \vec{a}$$

$$\vec{u}_i = \vec{v}_T' + \vec{\omega}' \times \vec{r}_i'' = \vec{v}_T' + (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i) + (\vec{\omega}' \times \vec{a})$$

$$\stackrel{!}{=} \vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$$

Das gilt für alle \vec{r}'_i , insbesondere für $\vec{r}'_i = 0$.



$$\Rightarrow \vec{v}'_T = \vec{v}_T - \vec{\omega}' \times \vec{a}$$

Außerdem für $\vec{a} = 0$: $\vec{v}'_T = \vec{v}_T \Rightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}$.

→ Die Winkelgeschwindigkeit sieht in allen körperfesten Bezugssystemen gleich aus, unabhg. von der Wahl des Bezugspunktes!

→ Drehungen gleicher Winkelgeschwindigkeit um parallele Achsen unterscheiden sich nur durch einen Translationsanteil.

zweckmäßige Wahl:

freier starrer Körper : Nullpunkt = Schwerpunkt
Kreisel : Nullpunkt = fixierter Punkt

Der Trägheitstensor

Wir versuchen, einen Ausdruck für die kinetische Energie eines rotierenden starren Körpers zu finden.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{u}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_T^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 + \sum_i m_i \vec{v}_T (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\text{Wegen } \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \vec{v}_T = \sum m_i (\vec{v}_T \times \vec{\omega}) \vec{r}_i = (\vec{v}_T \times \vec{\omega}) \sum m_i \vec{r}_i$$

verschwindet der Mischterm, wenn der Schwerpunkt $\vec{r}_s = \sum m_i \vec{r}_i$ als Nullpunkt gewählt wird.

$$\rightarrow \underline{T = \frac{M}{2} \vec{v}_T^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \equiv T_T + T_{\text{rot}}}$$

Betrachten jetzt nur den Rotationsanteil.

Hilfreiche Formeln:

$$\begin{aligned} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi(\vec{a}, \vec{b})]^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 [1 - \cos^2 \varphi(\vec{a}, \vec{b})] \\ &= \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \vec{b})^2 \end{aligned}$$

$$\cdot \vec{\omega}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2, \quad \vec{r}_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\cdot (\vec{\omega} \vec{r}_i)^2 = (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 2T_{\text{rot}} &= \omega_x^2 \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_x \omega_y \sum m_i x_i y_i \\ &\quad - \omega_x \omega_z \sum m_i x_i z_i - \omega_y \omega_x \sum m_i y_i x_i \\ &\quad + \omega_y^2 \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_y \omega_z \sum m_i y_i z_i \\ &\quad - \omega_z \omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_z \omega_y \sum m_i z_i y_i \\ &\quad + \omega_z^2 \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned}$$

Wir fassen die Summanden in einer Matrix zusammen:

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

Mit der Bezeichnung $\omega_1 \equiv \omega_x$, $\omega_2 \equiv \omega_y$, $\omega_3 \equiv \omega_z$ gilt dann

$$\underline{T_{\text{rot}}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \Theta_{kl} \omega_k \omega_l.$$

Die Matrix $\hat{\Theta}$ heißt Trägheitstensor und ist eine Verallgemeinerung des bereits bekannten Trägheitsmomentes.

Für kontinuierliche Körper gehen die Summen im Tensor in Integrale über:

$$\sum \rightarrow \int \quad \text{und} \quad m_i = \mu \Delta V_i \rightarrow \mu d\vec{r}^3.$$

Bei Rotation um eine der Koordinatenachsen x, y, z ist nur eine der Komponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ungleich Null, z.B. $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_{zz} \omega_z^2$. Die Diagonalelemente sind also gerade die Trägheitsmomente bzgl. der Koordinatenachsen.

Zusatz: $\hat{\Theta}$ besitzt demnach 3 linear unabhängige Eigenvektoren, nämlich gerade die Einheitsvektoren entlang der Achsen. Die zugehörigen Eigenwerte sind die Trägheitsmomente entlang dieser Achsen. Die EV bilden also eine Basis des \mathbb{R}^3 .

(auf dem \hat{O} operiert). Das bedeutet, dass \hat{O} diagonalisierbar ist (vgl. lin. Algebra)!

Jetzt: \hat{O} diagonalisieren, d.h. mittels geschickter Wahl des KOS eine Basis finden, in der \hat{O} nur Diagonaleinträge hat. (Hauptachsentransformation)

Neues KOS (ξ, η, ζ) , in dem gilt:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad A, B, C: \text{ "Hauptträgheitsmomente" }$$

$$\rightarrow \underline{T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} (A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2)}$$

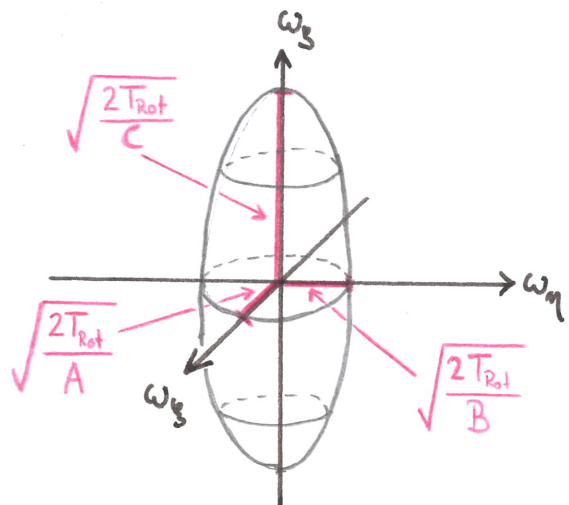
$$\text{(mit } \vec{\omega} = \omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta + \omega_\zeta \vec{e}_\zeta \text{)}$$

Mit $\tilde{A} = \frac{A}{2T_{\text{Rot}}}$, u.s.w. gilt offenbar die Ellipsengleichung:

$$\tilde{A}\omega_\xi^2 + \tilde{B}\omega_\eta^2 + \tilde{C}\omega_\zeta^2 = 1.$$

Damit beschreibt \hat{O} ein Ellipsoid in dem durch $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ aufgespannten 3-dimensionalen Raum mit Achsenlängen $\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}}}, \frac{1}{\sqrt{\tilde{B}}}, \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}}}$.

"Trägheitsellipsoid":



Zusatz: Was ist ein Tensor?

Ein Tensor ist eine mehrdimensionale Matrix mit einer Linearitätseigenschaft.

Zentraler Punkt: Verhalten bei Koordinatentransformationen.

→ Vorlesung:
$$\hat{\theta}^{i'}_{k'} = \sum_{i,k} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \hat{\theta}^i_k$$
 für Tensoren 2. Stufe

Anschauliche Bedeutung hier:

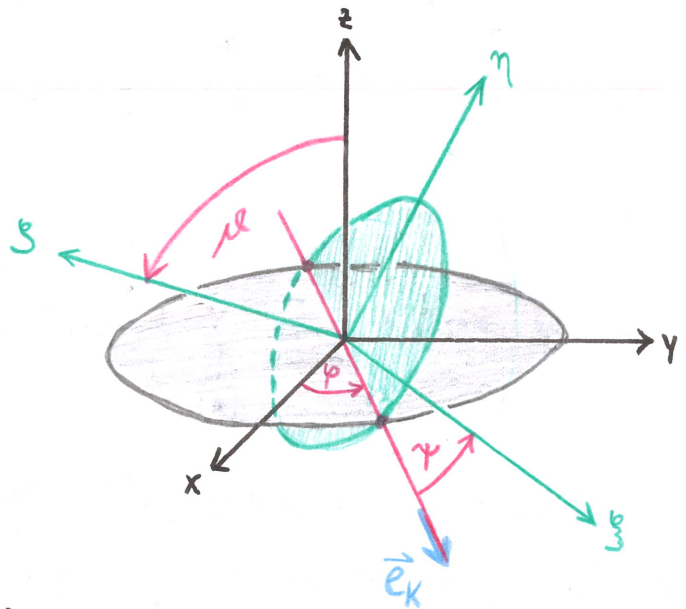
Da $\hat{\theta}$ ein Tensor ist, ändern sich seine Einträge bei einer Koordinatentransformation genau so, dass die kinetische Energie konstant bleibt.

Skalare sind Tensoren 0. Stufe.

Vektoren sind Tensoren 1. Stufe.

Euler'sche Winkel & Euler'sche Gleichungen

Betrachten ein körperfestes KOS (ξ, η, ζ) und ein raumfestes kartes. KOS (x, y, z) .



Da Knotenlinie, z-Achse und ξ -Achse orthogonal zueinander liegen, ist

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_k + \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\gamma} \vec{e}_\xi.$$

In der Basis von (ξ, η, ζ) kennen wir die Komponenten noch nicht:

$$\vec{\omega} = p \vec{e}_\xi + q \vec{e}_\eta + r \vec{e}_\zeta.$$

Mit $\vec{e}_k = \cos \gamma \vec{e}_\xi - \sin \gamma \vec{e}_\eta$ und

$$\vec{e}_z = \sin \psi \sin \gamma \vec{e}_\xi + \sin \psi \cos \gamma \vec{e}_\eta + \cos \psi \vec{e}_\zeta$$

folgt:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \psi \sin \gamma + \dot{\gamma} \cos \gamma \\ q &= \dot{\psi} \sin \psi \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \gamma \\ r &= \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\gamma} \end{aligned}$$

Komponenten der Winkelgeschw. im (ξ, η, ζ) -System

Formulierung des Drehimpulssatzes im (ξ, η, ζ) -KOS:

Die Bilanz $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$ gilt nur in Inertial- und Schwerpunktsystemen.

$$\frac{d}{dt} \cdot = \frac{d'}{dt} \cdot + \vec{\omega} \times \cdot \quad (*) \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M} \quad (\text{ab hier: } \cdot = \frac{d'}{dt})$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{L}_\xi + (qL_\eta - rL_\gamma) &= M_\xi \\ \dot{L}_\eta + (rL_\xi - pL_\gamma) &= M_\eta \\ \dot{L}_\gamma + (pL_\eta - qL_\xi) &= M_\gamma \end{aligned} \right\} (**)$$

Bestimmung der L_ξ, L_η, L_γ :

$$\vec{L} := \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{r}_i \stackrel{(*)}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_T + \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Wir betrachten ausschließlich die Fälle Nullpkt. = Schwerpkt. (also $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$) oder Nullpkt. = fixierter Pkt. (also $\vec{v}_T = 0$). \Rightarrow erster Term verschwindet

Mit „bac-cab“-Regel:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \vec{r}_i)$$

In Komponenten:

$$L_x \equiv L_1 = \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i$$

$$L_y \equiv L_2 = \dots$$

u. s. w.

$$\Rightarrow \underline{L_k = \sum_{m=1}^3 \Theta_{km} \omega_m}$$

Wählen jetzt die körperfesten Koordinaten (ξ, η, γ) im Hauptachsensystem, $\hat{\Theta} = \text{diag}(A, B, C)$.

$$\rightarrow \vec{L} = (A\omega_\xi, B\omega_\eta, C\omega_\gamma) \equiv (Ap, Bq, Cr) \equiv (L_\xi, L_\eta, L_\gamma)$$

Damit wird aus (**):

$$A\dot{p} - (C-B)qr = M_x$$

$$B\dot{q} - (A-C)rp = M_y$$

$$C\dot{r} - (B-A)pq = M_z$$

Euler'sche Gleichungen

($\hat{=}$ Drehimpulssatz im mitrotierenden Hauptachsensystem)

Bem: Die M_x, M_y, M_z sind i.A. abhängig von den Schwerpunktkoordinaten, den Euler'schen Winkeln γ, φ, μ sowie deren Zeitableitungen und explizit von der Zeit.

Der kräftefreie symmetrische Kreisel

- symmetrisch heißt hier: $A=B$ (o.B.d.A.)
→ ξ -Achse = Figurenachse
- kräftefrei: $\vec{M} = 0$

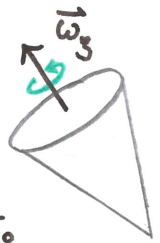
Bem: Das Drehmoment der Schwerkraft verschwindet, wenn fixierter Pkt. = Schwerpunkt (vgl. Grundpraktikum).

Euler'sche Glu.: $A\dot{p} + (C-A)qr = 0$
 $A\dot{q} + (A-C)rp = 0$
 $C\dot{r} = 0 \Rightarrow r = r_0 = \text{const}$

→ Es gibt also eine konstante Drehung um ξ .

Entkopplung und Auflösung (vgl. Vorlesung):

$$\ddot{p} + R^2 p = 0 \quad \ddot{q} + R^2 q = 0 \quad , \quad R \equiv \frac{A-C}{A} r_0$$

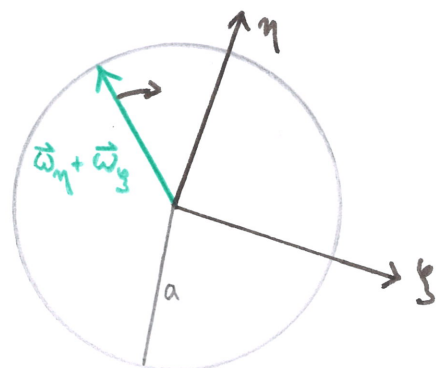


→ Es gibt also Schwingungen entlang der übrigen Achsen (harm. Oszillator!),

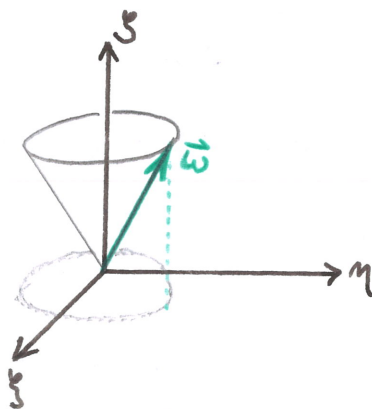
allg. Lösung: $p = a \sin(Rt + \varepsilon)$
 $q = a \cos(Rt + \varepsilon)$, a, ε Integrationskonst.

D.h. $p \equiv \omega_\eta$ und $q \equiv \omega_\xi$ oszillieren gegenphasig; die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die ξ - η -Ebene wandert auf einem Kreis.

Kreisgleichung:
 $p^2 + q^2 = a^2 = \text{const.}$



→ Also beschreibt $\vec{\omega}$ insgesamt einen Kreiskegel um die Figurenaxe („Polkegel“).



Jetzt: Betrachtung „von außen“, also Bestimmung von $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\mu(t)$.

→ Einsetzen von p, q, r ; Wahl des Raumfesten KOS (x, y, z) so, dass $L = L_z = \text{const.}$ ist.

$$\rightarrow L_\xi = L \sin\mu \sin\psi \stackrel{!}{=} A p = A (\dot{\varphi} \sin\mu \sin\psi + \dot{\mu} \cos\psi)$$

$$L_\eta = L \sin\mu \cos\psi \stackrel{!}{=} A q = A (\dot{\varphi} \sin\mu \cos\psi - \dot{\mu} \sin\psi)$$

$$L_\zeta = L \cos\mu \stackrel{!}{=} C r_0$$

Offenbar müssen μ und ψ Konstanten sein.

Alles zusammen: $(\tan\mu_0 = \frac{Aa}{Cr_0})$

$$\varphi(t) = \frac{a}{\sin\mu_0} t + \varphi_0, \quad \psi(t) = \Omega t + \varepsilon, \quad \mu(t) = \mu_0$$

- konstante Drehung der Figurenaxe auf einem Kreiskegel wegen $\varphi(t)$ und $\mu = \text{const}$ (Nutation).
- gleichzeitig Drehung des Körpers um seine Figurenaxe wegen $\psi(t)$.
- $\vec{\omega}$ ist Überlagerung beider Bewegungen, läuft also wegen $\omega_z = \text{const}$ (da $L_z = \text{const}$) auf einem Kreiskegel um die z -Achse („Spurkegel“)

Hamilton - Mechanik

Definition Hamilton-Funktion: $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$

generalisierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

kanonische Gleichungen: $\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$, $\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k$

- Bem:
- Meist sind die Nebenbedingungen skleronom und $L = T - U$. Dann ist $H = T + U$ einfach die Gesamtenergie.
 - Man bezeichnet die Menge aller q_k und p_k als Phasenraum.

Vorgehen: Formuliere H als Funktion der q_k und p_k und stelle die kanon. Gl. auf; dann Integration der gewünschten Koordinate.

Beispiele:

(1) Punktladung im elektromagnetischen Feld

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + Q \dot{\vec{r}} \vec{A} - QV(\vec{r}, t)$$

mit Ladung Q , Potential V und Vektorpotential \vec{A}
gener. Koordinaten: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + QA_x \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + QA_y \\ p_3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + QA_z \end{aligned} \right\} \text{ gener. Impulse}$$

$(\vec{p}_{\text{gen}} = \vec{p}_{\text{kin}} + Q\vec{A})$

→ Generalisierter und kinetischer Impuls sind verschieden.

$$\text{Mit } \vec{p}_{\text{kin}} = m\vec{v} : \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}_{\text{gen}} - Q\vec{A}}{m} \quad (*)$$

Mit Hilfe von (*) werden die generalisierten Geschwindigkeiten zugunsten generalisierter Impulse eliminiert:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \dot{\vec{r}} \vec{p}_{\text{gen}} - L$$

$$(*) \quad = \frac{\vec{p}_{\text{gen}} - Q\vec{A}}{m} \vec{p}_{\text{gen}} - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\text{gen}} - Q\vec{A}}{m} \right)^2 - \frac{\vec{p}_{\text{gen}} - Q\vec{A}}{m} Q\vec{A} + QV$$

$$\rightarrow \underline{H = \frac{1}{2m} (\vec{p}_{\text{gen}} - Q\vec{A})^2 + QV}$$

Bem: • $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

→ nächstes Semester!

• Für zeitunabh. Felder ist $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, also $H = E$ die Gesamtenergie.

(2) Streuung im Gravitationsfeld

Betrachten Testteilchen (Masse m) im Gravitationsfeld eines massiven Körpers (Masse M).

M ruhe im Koordinatenursprung.

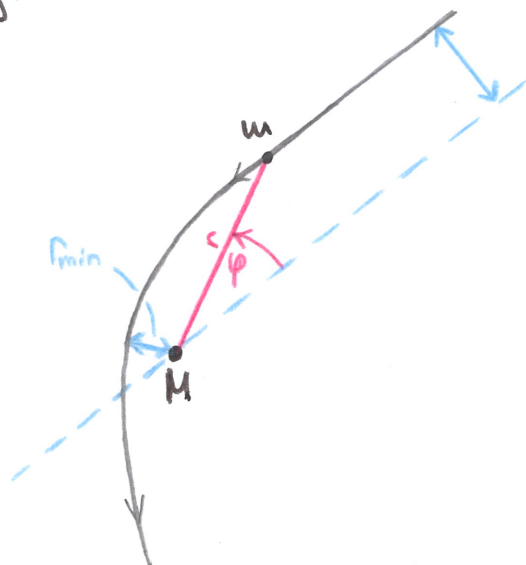
H ist die Energie:

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2M} - \frac{GmM}{r_{12}}$$

$$\vec{p}_2 = 0, \quad r_{12} \equiv r, \quad \vec{p}_1 \equiv \vec{p}$$

gener. Koordinaten:

$$r, \psi$$



$$\vec{p}^2 = m^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Lagrange:

$$L = T - U = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{GmM}{r} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{GmM}{r}$$

gen. Impulse:

$$p_{\text{gen},1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \equiv p_r$$

$$p_{\text{gen},2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \equiv L$$

→ Der gen. Impuls zur Koordinate r ist der Radialteil des kinet. Impulses.

→ Der gen. Impuls zur Koordinate φ ist der Drehimpuls L .

$$\underline{H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) - \frac{GmM}{r}}$$

kanon. Gln:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} = \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{GmM}{r^2} = -\frac{dp_r}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = \frac{L}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 = -\frac{dL}{dt} \quad (4)$$

(4) sagt, dass der Drehimpuls erhalten bleibt.

Mit (1) kann man die Zeit eliminieren, $dt = \frac{m}{p_r} dr$:

$$(3): d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt = \frac{L}{p_r r^2} dr$$

Energieerhaltung: $H(r=\infty) = \frac{p_{\infty}^2}{2m} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) - \frac{GmM}{r}$

$$\Rightarrow p_r(r) = \sqrt{-\frac{L^2}{r^2} + \frac{2GmM}{r} + p_{\infty}^2}$$

Substitution: $u = \frac{1}{r}$, $dr = -\frac{du}{u^2}$

$$\rightarrow \underline{dy = - \frac{L du}{\sqrt{-Lu^2 + 2Gm^2Mu + p_0^2}}}$$

Damit ist die Bahnkurve eindeutig bestimmt.

Bem: Statt Energieerhaltung kann man auch (2) benutzen.

Poisson-Klammern:

Seien $F = F(q_k, p_k, t)$, $G = G(q_k, p_k, t)$.

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^{N_F} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

→ abkürzende Schreibweise für kan. Glu.:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

→ Zeitableitung: $\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$

Für Erhaltungsgrößen gilt $\frac{dF}{dt} = 0$. Wegen $\{H, H\} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ heißt das, dass H eine Erhaltungsgröße ist, sobald es nicht explizit von der Zeit abhängt.

kanonische Transformationen:

- Transformation des Phasenraums: $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$
- neue Hamiltonfunktion: $H(q_i, p_i, t) \rightarrow H'(Q_i, P_i, t)$
- $Q_i = Q_i(q_k, p_k, t)$, $P_i = P_i(q_k, p_k, t)$

Die kanonischen Glu. sowie die Poisson-Klammern sind invariant unter kanonischen Transformationen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \rightarrow \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}$$

Hamilton'sches Prinzip der kleinsten Wirkung:

Bahnkurve $q_k(t)$ im N_f -dimensionalen Konfigurationsraum

Wirkungsfunktion:

$$W := \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

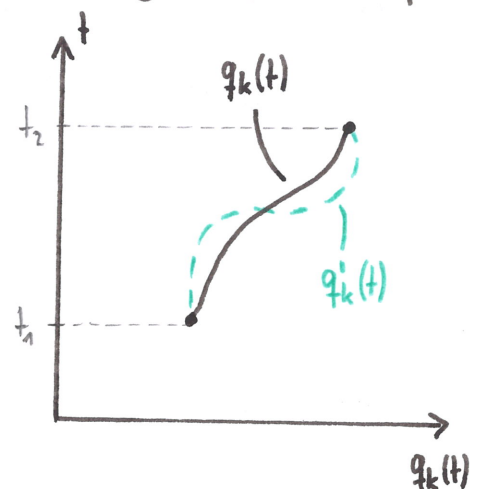
Man betrachtet „Vergleichsbahnen“ durch Variation von $q_k(t)$:

$$q'_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t).$$

Die Zeit wird nicht variiert ($\delta t = 0$); Anfangs- und Endpunkt bleiben fest ($\delta q_k(t_1) = 0 = \delta q_k(t_2)$).

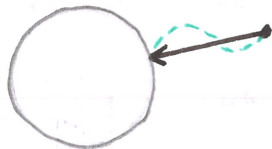
Prinzip: $\delta W = 0$

→ Die Wirkung nimmt für real durchlaufene Bahnen ein Extremum an.



Bsp. freier Fall, variiere $q_k = \varphi$

→ Vergrößerung von
 $L = T - U$ im
Integral



Aus dem Hamilton-Prinzip kann man z.B. die
Lagrange-Glu. II. Art herleiten.

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

• Versuch, durch kanon. Transformationen $H' = 0$ zu
erreichen ($\Rightarrow Q_k = \text{const}, P_k = \text{const}$)

• Einführung der sog. „Erzeugenden“ $W = W(q, P, t)$
mit $p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, Q_k = \frac{\partial W}{\partial P_k}, H' = H + \frac{\partial W}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \underline{H(q_k, \frac{\partial W}{\partial q_k}, t) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0}$$

Hamilton-Jacobi-Gl.
(partielle DGL zur
Bestimmung von W)

Tatsächlich ist W entlang
der Bahnkurven identisch mit der Wirkung.

Für einen freien MP im Potential $U(\vec{r})$ kann
man die „zeitfreie“ Hamilton-Jacobi-Gl. aufstellen:

$$\underline{(\text{grad } W)^2 = 2m(E - U)}$$