Zur Variationsrechnung

Betrachten Funktionale: Abbildungen von Funktionenräumen auf Körper, „Funktionen auf Funktionen"

- Man schreibt $F[y]$ oder $F[y(x)]$, wobei $y(x)$ eine Funktion ist.
- Beispiele: – Dirac'sche Delta-Distribution,

$$\delta[f] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx := f(0)$$

– (Hamilton'sche) Wirkung,

$$S: \{q_k(t),\ \dot{q}_k(t)\} \to \mathbb{R}\ ; \qquad S = \int_{t_0}^{t} L[q_k(t'), \dot{q}_k(t'); t']\,dt'$$

Es sei gegeben ein Funktional $F[y, y']$, eine Funktion $y(x)$ und deren Ableitung $y'(x)$. F sei definiert als

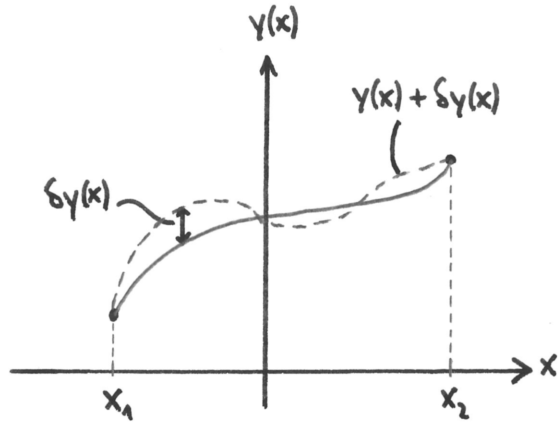
$$F[y, y'] := \int_{x_1}^{x_2} f\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx$$

mit $x_1, x_2 = \text{const}$ und f eine beliebige Funktion.

Gesucht wird ein $y(x)$, für das $F[y, y']$ extremal ist, eine sogenannte „stationäre Lösung".

Gesetzt, y sei so eine Lösung; betrachte $y(x) + \delta y(x)$ als alternativen Weg, wobei $\delta y(x)$ klein ist (s. Abb.).

Dann ändert sich $f(x, y(x), y'(x))$ gerade um $\delta f = f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x, y, y')$.



Es sei: $\delta y(x = x_1) \overset{!}{=} 0 \overset{!}{=} \delta y(x = x_2)$.

Man sagt: Wir variieren bezüglich y (und y'); δ heißt Variation.

Jetzt: Taylor-Entwicklung (in y und y') um kleine Variationen

$$\rightarrow f(x, \; + \delta y, y' + \delta y') = f(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \mathcal{O}(\delta y^2)$$

$$\rightarrow \delta f \approx \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'$$

Für ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt von $F[y, y']$ muss δF verschwinden:

$$0 \overset{!}{=} \delta F = \int_{x_1}^{x_2} \delta f \, dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right), \qquad \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right) = \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \left(\frac{d}{dx} \delta y \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) + \cancel{\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right)} \rightarrow 0, \text{ da } \delta y(x = x_{1/2}) = 0$$

feste, aber <u>beliebige</u> Variation!

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}}, \qquad \text{Bestimmungsgleichung für } y(x)$$